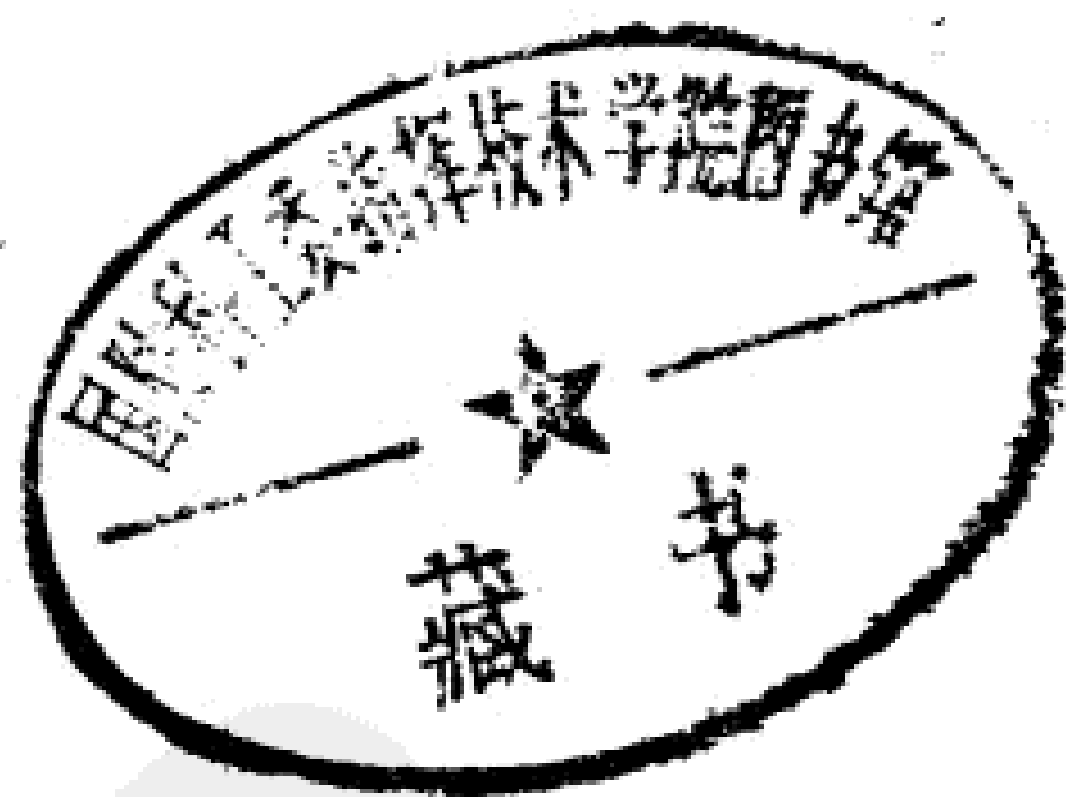
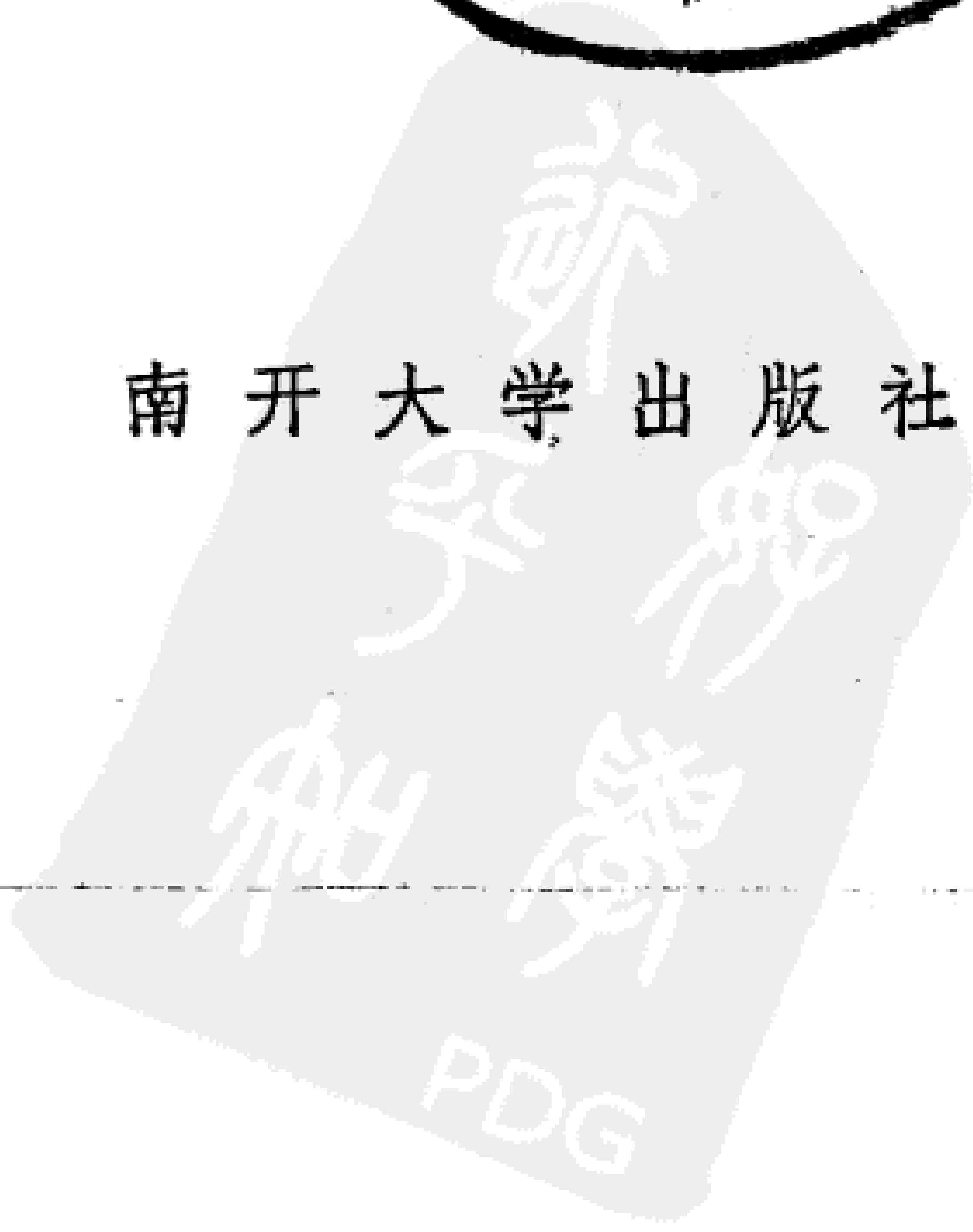


微积分证明方法初析

贾建华
王克芬 编著





南开大学出版社

内 容 提 要

本书对一元函数微积分中一些基本的、有启发性的典型证明方法进行了比较系统地整理。在证明安排上，由浅入深、有易有难。有些例题采用多种方法证明，并举出适当的反例以加深对基本概念的理解。每节还都配备了适当数量的练习题。

本书可做为初学或复习微积分的读者的参考书，也可供讲授或辅导微积分课的教师参考之用。

微积分证明方法初析
贾建华　王克芬 编著

南 开 大 学 出 版 社 出 版
（天津八里台南开大学校内）
新华书店天津发行所发行
河北省邮电印刷厂印刷

1989年8月第1版　1989年8月第1次印刷
开本：787×1092 1/32　印张：9.375
字数：215千　印数：1—4,500
ISBN7-310-00099-4/O·19　定价：1.70元

前 言

微积分学是理、工、农、医等学科所需要的一门基础课。并且，随着自然科学与社会科学的相互渗透，如今，它也已成为某些社会科学的必修课题。学好这门课，不仅在于会用书本上的公式进行计算，更重要的是能掌握它的基本原理和基本概念，以及灵活运用基本原理和概念进行严格地数学证明，而这也正是学习微积分这门课的难点。笔者整理这本《微积分证明方法初析》，主观上就是希望能对初学微积分的读者在加强解题技巧和提高逻辑推理能力方面有所帮助。同时，对准备报考研究生的读者可作为复习资料之用。

在本书的选材过程中，笔者尽量考虑了有关资料中一些比较巧妙的、有启发性的典型例题。在证明方法上力图做到由浅入深、详细论证和解答，并且有些例题的证明是经过多年的教学实践反复修改而成的，使之尽量符合学生的思维特点和方法，以便对证明易于接受和理解，起到触类旁通的作用。此外，考虑到学生的思想方法及思维能力的差异，有些例题则给出了多种证明方法，这些证明有些是较直观和容易理解的，有些则是带有一定启发性和技巧性而不易想到的方法，目的是为了使学生不仅学会了证明命题的方法，而且通过证明命题，在思想方法上有所启示和收获，以便提高逻辑推理能力。考虑到对于一些概念的理解上，学生容易出现一些问题，整理本书时对一些典型例题均做了必要的说明，并举出了适当的反例以加深对基本概念的理解和开阔学生的思路。为了加强读者独立解

题能力，本书每节都配备了适当数量的练习题目，希望读者能独立地加以证明。

本书只整理了微积分学的一元函数部分，因为多元函数部分的证明方法基本上与一元函数是大同小异的，只要很好地掌握了一元函数的证明思路，一般多元函数的证明则是不会遇到太大困难的。

在整理本书的过程中，曾多次请教过定光桂教授。也得到一些同事们的热情鼓励和帮助，在此一并致谢。

由于水平所限，本书缺点错误在所难免，敬请读者批评指正。

贾建华　王克芬

1987年2月



目　录

第一章　数列的极限

第二章　函数的极限与连续性

第三章　函数的导数

第四章　积分

第一章　数列的极限

§1.1　数列极限的定义及实数理论

基础理论

1. 数列极限的定义

如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在正整数N，使得当$n>N$时，总有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

则称数列$\{x_n\}$有极限a（或称$\{x_n\}$收敛于a），记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \quad (\text{或}\ x_n\to a \quad (n\to\infty))$$

如果对于任意给定的$M>0$，总存在正整数N，使得当$n>N$时，总有

$$|x_n|>M$$

则称数列$\{x_n\}$趋向于无穷，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty \quad (\text{或}\ x_n\to\infty \quad (n\to\infty))$$

如果对于任意给定的$M>0$，总存在正整数N，使得当$n>N$时，总有

$$x_n>M\ (\text{或}\ x_n<-M)$$

则称数列$\{x_n\}$趋向于正（或负）无穷，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty \quad (\text{或}\ \lim_{n\to\infty} x_n=-\infty)$$

2． 阿基米德（Archimedes）公理

若 $\varepsilon>0$和$M>0$是任意两个正实数，则存在正整数N，使$N\varepsilon>M$。

3．有理数和无理数在实数系中的稠密性

任何两个相异的实数之间既存在有理数，也存在无理数。

4． 公理

任何有上界的实数集必有上确界。

利用定义证明数列$\{x_n\}$的极限是a，一般要掌握两个要点：一是将数列$\{|x_n-a|\}$的各项（或$n>N$时的各项）适当放大，使之成为一个较简单的数列；二是要保证放大后的数列仍是无穷小量，也就是放大后的数列其极限为零。

例 1 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^a}=0$ （其中$a>0$）。

证 因为$e>2$，所以对任意的正整数n，有

$$e^n>(1+1)^n\geqslant1+n>n$$

两边取对数得

$$n>\ln n$$

故

$$\left|\frac{\ln n}{n^a}\right|=\frac{\ln n}{n^a}=\frac{\frac{1}{a}\ln n^a}{n^a}$$

$$<\frac{\frac{1}{a}\ln([n^a]+1)}{n^a}$$ ①

---

① $[a]$表示不超过数a的最大整数。例如$[3.5]=3$，$[0.5]=0$，$[-2.5]=-3$，$[\sqrt{5}]=2$。

$$\leqslant \frac{\frac{2}{\alpha}\ln(2[n^{\alpha/2}])}{n^{\alpha}}$$

$$\leqslant \frac{\frac{1}{\alpha}\cdot 2[n^{\alpha/2}]}{n^{\alpha}}$$

$$\leqslant \frac{\frac{4}{\alpha}\cdot n^{\alpha/2}}{n^{\alpha}}$$

$$= \frac{4}{\alpha n^{\alpha/2}}$$

因此，对任意给定的$\varepsilon>0$，令 $N=\left[\left(\frac{4}{\alpha\varepsilon}\right)^{2/\alpha}\right]+1$， 则当 $n>N$时

$$\left|\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right| < \frac{4}{\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}} < \frac{4}{\alpha\left(\frac{4}{\alpha\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{2}}} = \varepsilon$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}} = 0$$

例 2　试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

证　令 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda_n$ $(n\geqslant 2,\ \lambda_n>0)$，则

$$n=(1+\lambda_n)^n$$

$$\geqslant 1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2$$

$$>1+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2$$

所以 $$\lambda_n^2 < \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

故 $$\lambda_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$$

从而对任意给定的 $\varepsilon>0$，令 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+1$，则当 $n>N$ 时

$$|\sqrt[n]{n}-1| = \sqrt[n]{n}-1 = \lambda_n < \sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

上面讲到用数列极限的定义直接证明某数列的极限是 a 的方法。但我们经常遇到如下的问题：已知数列$\{x_n\}$的极限是a，证明另一个由$\{x_n\}$所确定的数列$\{y_n\}$的极限是b。这类问题一般仍是反复运用数列极限定义进行证明。具体方法如下：由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$知，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N_1$，当$n>N_1$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$．再根据已知条件推得存在正整数$N_2$，当$n>N_2$时$|y_n-b|<\varepsilon$成立，从而命题得证。

例3 设 $x_n>0$ $(n=1, 2, \cdots)$，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=a$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$ （a有限或正无穷）。

证 分三种情形证明。

（1） 设$0<a<+\infty$。由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=a$，故对任给

的 $\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<a$），必存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时

$$\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

即
$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n}{x_{n-1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$$

所以

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{N_1+1}}{x_{N_1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{N_1+2}}{x_{N_1+1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n}{x_{n-1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$$

故
$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_1}$$

$$<\frac{x_{N_1+1}}{x_{N_1}}\cdot\frac{x_{N_1+2}}{x_{N_1+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}$$

$$<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_1}$$

从而

$$\left[\frac{x_{N_1}}{\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}\right]^{1/n}\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\sqrt[n]{x_n}$$

$$<\left[\frac{x_{N_1}}{\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}\right]^{1/n}\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x_{N_1}}{\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}\right]^{1/n}\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)=a-\frac{\varepsilon}{2}>a-\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x_{N_1}}{\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}\right]^{1/n}\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)=a+\frac{\varepsilon}{2}<a+\varepsilon$$

故存在正整数 N_2，使得当 $n>N_2$ 时

$$\left[\frac{x_{N_1}}{\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}\right]^{1/n}\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)>a-\varepsilon$$

及

$$\left[\frac{x_{N_1}}{\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}\right]^{1/n}\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)<a+\varepsilon$$

同时成立

令 $N=\max(N_1, N_2)$，则当 $n>N$ 时

$$a-\varepsilon<\sqrt[n]{x_n}<a+\varepsilon$$

即 $$|\sqrt[n]{x_n}-a|<\varepsilon$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a\text{。}$$

（2） 设 $a=+\infty$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=+\infty$，所以对任给的 $M>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}>2M$$

所以 $$\frac{x_{N_1+1}}{x_{N_1}}>2M$$

$$\frac{x_{N_1+2}}{x_{N_1+1}}>2M$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}>2M$$

故

$$\frac{x_n}{x_{N_1}}=\frac{x_{N_1+1}}{x_{N_1}}\cdot\frac{x_{N_1+2}}{x_{N_1+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}$$
$$<(2M)^{n-N_1}$$

从而

$$\sqrt[n]{x_n}>2M\left[\frac{x_{N_1}}{(2M)^{N_1}}\right]^{1/n}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}2M\left[\frac{x_{N_1}}{(2M)^{N_1}}\right]^{1/n}=2M>M$$

所以存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时

$$2M\left[\frac{x_{N_1}}{(2M)^{N_1}}\right]^{1/n}>M$$

令 $N=\max(N_1,\ N_2)$，则当 $n>N$ 时

$$\sqrt[n]{x_n}>2M\left[\frac{x_{N_1}}{(2M)^{N_1}}\right]^{1/n}>M$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=+\infty$。

（3）设 $a=0$。令 $y_n=\frac{1}{x_n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{x_n}{x_{n-1}}}=+\infty$$

由(2)得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n}=+\infty$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{y_n}}=0$$

必须指出，本命题的逆命题不成立。例如$x_n=2+(-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}$不存在。

例 4 设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，且存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\{y_n\}$ 严格单增，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$（ a 有限或正负无穷)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$。

在证明例 4 之前，先证明一个引理：如果

$$\alpha<\frac{a_1}{b_1}<\beta,\quad \alpha<\frac{a_2}{b_2}<\beta,\quad \cdots,\quad \alpha<\frac{a_n}{b_n}<\beta$$

其中b_1，b_2，…，$b_n>0$，则

$$\alpha<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<\beta$$

证 因为 $\alpha<\frac{a_k}{b_k}<\beta\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，所以

$$\alpha b_k<a_k<\beta b_k$$

故

$$\alpha(b_1+b_2+\cdots+b_n)<a_1+a_2+\cdots+a_n$$
$$<\beta(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

从而 $$\alpha<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<\beta$$

下面对例 4 进行证明。

证 分三种情形证明。

（1） 设 a 有限。不妨设 $n\geqslant 1$ 时，$\{y_n\}$ 严格单增。因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$$

所以对任给的 $\varepsilon>0$．存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时

$$a-\varepsilon<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<a+\varepsilon$$

由于

$$\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}$$

$$=\frac{(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_{N_1+1}-x_{N_1})}{(y_n-y_{n-1})+(y_{n-1}-y_{n-2})+\cdots+(y_{N_1+1}-y_{N_1})}$$

故由引理得

$$a-\varepsilon<\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}<a+\varepsilon$$

即 $$\left|\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}-a\right|<\varepsilon$$

而

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}+\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}$$

$$=\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}+\frac{x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}-\frac{x_n y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}$$

$$=\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}+\frac{x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}$$

$$-\frac{(x_n-x_{N_1})y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}-\frac{x_{N_1}y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n-x_{N_1})y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{N_1}y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}=0$$

所以存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时

$$\left|\frac{x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{(x_n-x_{N_1})y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}\right|<\varepsilon$$

及
$$\left|\frac{x_{N_1}y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}\right|<\varepsilon$$

同时成立。

令 $N=\max(N_1, N_2)$，则当 $n>N$ 时

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\leqslant\left|\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}-a\right|+\left|\frac{x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}\right|$$
$$+\left|\frac{(x_n-x_{N_1})y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}\right|+\left|\frac{x_{N_1}y_{N_1}}{y_n(y_n-y_{N_1})}\right|$$
$$<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=4\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$。

（2） 设 $a=+\infty$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$ 知，存在正整数 N_1（不妨设 $N_1>N$），当 $n>N_1$ 时

$$x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}>0$$

所以
$$x_n>x_{n-1}$$

因为

$$x_{N_1+1}-x_{N_1}>y_{N_1+1}-y_{N_1}$$
$$x_{N_1+2}-x_{N_1+1}>y_{N_1+2}-y_{N_1+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}$$

故各式相加并移项得

$$x_n>y_n-y_{N_1}+x_{N_1}$$

因此当$n>N_1$时$\{x_n\}$严格单增趋于正无穷。于是由（1）知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$。

（3） 设 $a=-\infty$。令 $a_n=-x_n$，则由（2）得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{y_n}=+\infty$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=-\infty$。

这里需要指出，例 4 的逆命题不成立。例如

$$x_n=\frac{1+(-1)^1}{2}+\frac{1+(-1)^2}{2}+\cdots$$
$$+\frac{1+(-1)^n}{2},\quad y_n=n\quad(n=1,2\cdots)$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{2}$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 不存在，

由例 4 立即可得下面的**重要命题**：

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$。

事实上，令 $y_n=n$。$x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n(n=1,\ 2,\cdots)$，

则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

故由例 4 得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\\&=a\end{aligned}$$

本命题的逆命题也不成立，例如 $a_n=(-1)^n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在。

例 5 设数列 $\{x_n\}$ 具有性质 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$。

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，所以对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时

$$|x_n-x_{n-2}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

由于

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant |x_n - x_{n-2}| + |x_{n-2} - x_{n-1}|$$
$$= |x_n - x_{n-2}| + |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

故递推可得

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant |x_n - x_{n-2}| + |x_{n-1} - x_{n-3}| + \cdots +$$
$$+ |x_{N_1+1} - x_{N_1-1}| + |x_{N_1} - x_{N_1-1}|$$
$$< (n - N_1)\frac{\varepsilon}{2} + |x_{N_1} - x_{N_1-1}|$$
$$< \frac{n\varepsilon}{2} + |x_{N_1} - x_{N_1-1}|$$

所以

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|x_{N_1} - x_{N_1-1}|}{n}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{N_1} - x_{N_1-1}|}{n} = 0$$

所以存在正整数N_2，当$n > N_2$时

$$\frac{|x_{N_1} - x_{N_1-1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

令 $N = \max(N_1, N_2)$，则当 $n > N$ 时

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$。

注意，本命题的逆命题不成立。例如设 $x_n = (-1)^{[n/2]}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2})$ 不存在。

例 6 设 $y_{n+1}=x_n+ax_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 其中 $|a|>1$. 试证 $\{y_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{x_n\}$ 收敛。

证 充分性显然成立，故只证必要性。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$, $B=\dfrac{A}{a+1}$, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N_1, 当 $n>N_1$ 时

$$|y_n-A|<\varepsilon$$

因为

$$\begin{aligned}|y_n-A| &= |x_{n-1}+ax_n-(a+1)B|\\ &\geqslant |a|\ |x_n-B|-|x_{n-1}-B|\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|x_n-B| &\leqslant \frac{1}{|a|}|y_n-A|+\frac{1}{|a|}|x_{n-1}-B|\\ &<\frac{\varepsilon}{|a|}+\frac{1}{|a|}|x_{n-1}-B|\end{aligned}$$

从而

$$|x_{N_1+1}-B|<\frac{\varepsilon}{|a|}+\frac{1}{|a|}|x_{N_1}-B|$$

$$|x_{N_1+2}-B|<\frac{\varepsilon}{|a|}+\frac{1}{|a|}|x_{N_1+1}-B|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|x_n-B|<\frac{\varepsilon}{|a|}+\frac{1}{|a|}|x_{n-1}-B|$$

故

$$\begin{aligned}|x_n-B| &<\frac{\varepsilon}{|a|}\sum_{k=0}^{n-N_1-1}\left(\frac{1}{|a|}\right)^k\\ &\quad+\left(\frac{1}{|a|}\right)^{n-N_1}|x_{N_1}-B|<\end{aligned}$$

$$<\frac{\varepsilon}{|a|-1}+\left(\frac{1}{|a|}\right)^{n-N_1}|x_{N_1}-B|$$

因为 $\frac{1}{|a|}<1$。所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|a|}\right)^{n-N_1}|x_{N_1}-B|=0$$

因此存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时

$$\left(\frac{1}{|a|}\right)^{n-N_1}|x_{N_1}-B|<\varepsilon$$

令 $N=\max(N_1, N_2)$，则当 $n>N$ 时

$$|x_n-B|<\frac{\varepsilon}{|a|-1}+\varepsilon=\frac{|a|}{|a|-1}\varepsilon$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$，从而$\{x_n\}$收敛。

我们在这里不仅证明了$\{x_n\}$收敛，而且顺便得出其极限与$\{y_n\}$的极限的关系。需要强调的是，当 $|a|\leqslant 1$时，上述结论未必成立。例如设$x_n=2^n$，$a=\frac{-1}{2}$，则$y_{n+1}=x_n+ax_{n+1}=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，但 $\{x_n\}$ 不收敛。

例 7 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$b_n=\frac{1}{2^n}(a_0+C_n^1a_1+\cdots+C_n^na_n)$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

证 因为

$$2^n=(1+1)^n=1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$$

故
$$b_n-a=\frac{1}{2^n}[(a_0+C_n^1a_1+\cdots+C_n^na_n)-2^na]$$

$$=\frac{1}{2^n}[(a_0+C_n^1a_1+\cdots+C_n^na_n)-$$

$$-(1+C_n^1+\cdots+C_n^n)a]$$

$$=\frac{1}{2^n}[(a_0-a)+C_n^1(a_1-a)+\cdots+C_n^n(a_n-a)]$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N_1$，当$n>N_1$时

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

令

$$x_n=\frac{1}{2^n}[(a_0-a)+C_n^1(a_1-a)+\cdots+C_n^{N_1}(a_{N_1}-a)]$$

$$y_n=\frac{1}{2^n}[C_n^{N_1+1}(a_{N_1+1}-a)+C_n^{N_1+2}(a_{N_1+2}-a)+\cdots+C_n^n(a_n-a)]$$

$$M=\max\{|a_0-a|,\ |a_1-a|,\ \cdots,\ |a_{N_1}-a|\}$$

由于对任意的正整数k，有

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\leqslant\frac{n^k}{k!}\leqslant n^k$$

所以

$$|x_n|\leqslant\frac{M(N_1+1)n^{N_1}}{2^n}<\frac{M(N_1+1)n^{N_1}}{C_n^{N_1+1}}$$

$$=\frac{M(N_1+1)(N_1+1)!\ n^{N_1}}{n(n-1)\cdots(n-N_1)}\qquad(1.1.1)$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M(N_1+1)(N_1+1)!n^{N_1}}{n(n-1)\cdots(n-N_1)}=0$，所以由式(1.1.1)得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，故对上述的$\varepsilon>0$，存在正整数$N_2$，当$n>N_2$时

$$|x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又因为

$$|y_n| \leqslant \frac{1}{2^n}\left[C_n^{N_1+1}|a_{N_1+1}-a|+C_n^{N_1+2}|a_{N_1+2}-a| + \cdots + C_n^n|a_n-a|\right]$$

$$< \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\left[C_n^{N_1+1}+C_n^{N_1+2}+\cdots+C_n^n\right]$$

$$< \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\left[1+C_n^1+\cdots+C_n^n\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\cdot 2^n = \frac{\varepsilon}{2}$$

令 $N=\max(N_1,\ N_2)$。则当 $n>N$时

$$|b_n-a| = |x_n+y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$。

实数理论是对数学命题进行严格论证的理论基础，因此较熟练地掌握实数理论的有关结论及其证明方法是非常必要的，以下六个命题是实数理论的基本结论。

（1）单调有界数列有极限。

（2）有上(下)界的非空数集必有上(下)确界。

（3）**区间套定理** 设一列闭区间 $\{[a_n,\ b_n]\}$ 适合以下两个条件：

(i) $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n \qquad (n=1,2,\ \cdots)$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

则必有唯一的一点ξ，使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\xi$$

且ξ属于一切闭区间$[a_n,\ b_n]$。

（4）**有限覆盖定理** 若有限闭区间$[a,\ b]$被一组开区间

$\{G\}$覆盖，则必定可以从$\{G\}$中选出有限多个开区间，这有限多个开区间仍覆盖$[a, b]$。

（5）**柯西（cauchy）收敛原理** 数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是：对任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个正整数N，当$m, n>N$时，有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon$$

（6）任一有界数列必有收敛子列。

需要指出的是，上述六个命题是等价的。就是说，如果这六个命题中承认其中任意一个命题正确，即将这一命题作为公理，由此可推出其余五个命题的正确性。

要证明这六个命题的等价性，当然可采用证明六个命题中任何两个命题等价的方法，但为了使证明简洁，只要按下述顺序证明即可：（1）⇒（2）⇒（3）⇒（4）⇒（5）⇒（6）⇒（1）。

下面证明上述六个命题的等价性。

证 (1)⇒(2)

设M为数集E的一个上界，任取$c\in E$，若$c=M$，则M即为E的上确界。否则，设$a_0=c$，$b_0=M$ 将$[a_0, b_0]$分成二等份 若$\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]\cap E\neq\phi$，则取$a_1=\frac{a_0+b_0}{2}$，$b_1=b_0$；若$\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]\cap E=\phi$，则取$a_1=a_0$，$b_1=\frac{a_0+b_0}{2}$。再将$[a_1, b_1]$分成二等份，如果有$\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]\cap E\neq\phi$，则取$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=b_1$；若有$\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]\cap E=\phi$，则取$a_2=a_1$，$b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$。如此继续进行下去，得到两个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，这两个数列满足：

(i) $a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1\leqslant b_0$

(ii) $[a_n, b_n]\cap E\neq\phi$，而$(b_n, +\infty)\cap E=\phi\ (n=1, 2, \cdots)$

(iii) $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} \to 0 (n \to \infty)$

由于数列$\{b_n\}$单调有界，因此由命题(1)知$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$。下面证明$\beta = \sup E$。

显然对任意$x \in E$，$x \leqslant b_n (n=1, 2, \cdots)$，故

$$x \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在正整数N，使得$b_N - a_N < \varepsilon$，故$b_n - \varepsilon < a_N$。由于$\beta \leqslant b_n$，因此有$\beta - \varepsilon \leqslant b_N - \varepsilon < a_N$，又$[a_N, b_N] \cap E \neq \phi$，所以存在$x_0 \in E$，使$x_0 \in [a_N, b_N]$，故$a_N \leqslant x_0$，从而$\beta - \varepsilon < x_0$。

由以上证明知，$\beta = \sup E$，因此E有上确界。

同理可证若非空数集E有下界，则必有下确界。

(2)⇒(3)

由于$a_n < b_1 (n=1,2,\cdots)$，因此$\{a_n\}$有上确界，设$\sup\{a_n\} = \beta$。因为对任意的正整数m，n，都有$a_n \leqslant b_m$，故b_m都是$\{a_n\}$的上界，因此有$\beta \leqslant b_m$。

另一方面，因$a_m \leqslant \beta$，故$a_m \leqslant \beta \leqslant b_m$，即$\beta$属于一切闭区间$[a_n, b_n]$。

下面证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$。

由于$\beta = \sup\{a_n\}$，因此对任意给定的$\varepsilon > 0$，必有a_N，使$a_N > \beta - \varepsilon$。又$\{a_n\}$单调上升，所以当$n > N$时

$$a_n \geqslant a_N > \beta - \varepsilon$$

即

$$\beta - a_n < \varepsilon$$

又由$a_n \leqslant \beta$得$0 \leqslant \beta - a_n < \varepsilon$，故

$$|a_n - \beta| < \varepsilon$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim_{n\to\infty}a_n=\beta$$

再证 β 的唯一性。

假设又有 $\beta_0\in[a_n,\ b_n]$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，则

$$|\beta_0-\beta|\leqslant b_n-a_n\to 0\quad(n\to\infty)$$

因此 $\beta_0=\beta$，说明 β 是唯一的。

令 $\xi=\beta$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，且 ξ 属于一切闭区间 $[a_n,\ b_n]$。

(3)⇒(4)

假设 $[a,\ b]$ 被一组开区间 $\{G\}$ 覆盖，但不能被 $\{G\}$ 中有限个开区间覆盖。现将 $[a,b]$ 等分为两段，得到 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$，$\left[\dfrac{a+b}{2},\ b\right]$ 两个闭区间。显然二者之中至少有一个不能被 $\{G\}$ 中有限个开区间所覆盖，取这个闭区间为 $[a_1,b_1]$。再将 $[a_1,\ b_1]$ 等分为两段，则 $\left[a_1,\ \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$，$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},\ b_1\right]$ 两个闭区间中至少有一个不能被 $\{G\}$ 中有限个开区间所覆盖，取这个闭区间为 $[a_2,b_2]$，这样继续作下去，得到一列闭区间 $\{[a_n,\ b_n]\}$，其中每个闭区间都不能被 $\{G\}$ 中有限个开区间覆盖，而且有

$$a\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\cdots$$

$$b\geqslant b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant\cdots$$

$$a_n<b_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$$

根据区间套定理，应有 $\xi\in[a_n,\ b_n]$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$$

另一方面，由于$\{G\}$覆盖$[a, b]$，$\xi\in[a, b]$，故存在开区间$(\alpha, \beta)\in\{G\}$，使$\xi\in(\alpha, \beta)$。

令$\delta=\min\{\xi-\alpha, \beta-\xi\}$，则$\delta>0$，因为极限$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，所以当$n$充分大时，$b_n-a_n<\delta$，从而$[a_n b_n]\subseteq(\alpha,\beta)$，说明$[a_n, b_n]$被$(\alpha, \beta)$所覆盖，此与$[a_n, b_n]$不能被$\{G\}$中有限个开区间所覆盖的结论相矛盾。因此假设是错误的，即有限覆盖定理成立。

(4)⇒(5)

设数列$\{x_n\}$满足：对任给的$\varepsilon>0$，存在正整数N，使得当$m, n>N$时

$$|x_m-x_n|<\varepsilon$$

因此对$\varepsilon=1$，则必存在正整数N_1，当$m, n>N_1$时

$$|x_m-x_n|<1$$

令$m=N_1+1$得

$$|x_n|<|x_{N_1+1}|+1$$

取$M=\max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N_1}|, |x_{N_1+1}|+1\}$，则

$$|x_n|\leqslant M \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在，则对任一$x\in[-M,M]$，必存在$\varepsilon(x)>0$，使$\{x_n\}$中有无穷多项落在开区间$(x-\varepsilon(x), x+\varepsilon(x))$外面。实事上，若存在$x_0\in[-M, M]$，使得对于任给的$\varepsilon>0$，$\{x_n\}$中只有有限项落在$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$外面，即存在正整数$N$，当$n>N$时，$x_0\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$，因此$|x_n-x_0|<\varepsilon$，这说明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，此与$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在矛盾。

显然$\{(x-\frac{\varepsilon(x)}{2}, x+\frac{\varepsilon(x)}{2}); x\in[-M, M]\}$覆盖$[-M,M]$，根根有限覆盖定理，必存在有限个开区间也覆盖$[-M, M]$。设这有限个开区间为$(\overline{x_1}-\frac{\varepsilon_1}{2}, \overline{x_1}+\frac{\varepsilon_1}{2})$，

$\left(\overline{x_2}-\frac{\varepsilon_2}{2},\ \overline{x_2}+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)$，…，$\left(\overline{x_k}-\frac{\varepsilon_k}{2},\ \overline{x_k}+\frac{\varepsilon_k}{2}\right)$。

令 $\varepsilon_0=\min\left(\frac{\varepsilon_1}{2},\ \frac{\varepsilon_2}{2},\ \cdots,\ \frac{\varepsilon_k}{2}\right)$，则存在正整数 N_2，使得当 m，$n>N_2$ 时

$$|x_n-x_m|<\varepsilon_0$$

特别，取 $m=N_2+1$，得

$$|x_n-x_{N_2+1}|<\varepsilon_0$$

由于 $\left(\overline{x_1}-\frac{\varepsilon_1}{2},\ \overline{x_1}+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$，$\left(\overline{x_2}-\frac{\varepsilon_2}{2},\overline{x_2}+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)$，…，$\left(\overline{x_k}-\frac{\varepsilon_k}{2},\ \overline{x_k}+\frac{\varepsilon_k}{2}\right)$ 覆盖 $[-M,M]$，而 $x_{N_2+1}\in[-M,\ M]$，因此存在正整数 i（$1\leqslant i\leqslant k$），使 $x_{N_2+1}\in\left(\overline{x_i}-\frac{\varepsilon_i}{2},\ \overline{x_i}+\frac{\varepsilon_i}{2}\right)$

因为当 $n>N_2$ 时

$$|x_n-\overline{x_i}|\leqslant|x_n-x_{N_2+1}|+|x_{N_2+1}-\overline{x_i}|$$

$$<\varepsilon_0+\frac{\varepsilon_i}{2}\leqslant\frac{\varepsilon_i}{2}+\frac{\varepsilon_i}{2}=\varepsilon_i$$

故 $x_n\in(\overline{x_i}-\varepsilon_i,\overline{x_i}+\varepsilon_i)$。这说明 $\{x_n\}$ 中只有有限项落在 $(\overline{x_i}-\varepsilon_i,\overline{x_i}+\varepsilon_i)$ 的外面，此与 ε_i 的取法矛盾。说明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在的假设是错误的。

（5）⇒（6）

设 $\{x_n\}\subseteq[a,\ b]$，将 $[a,\ b]$ 分成二等份，取其含有 $\{x_n\}$ 中无穷多项的区间为 $[a_1,\ b_1]$（如果两个区间都含有 $\{x_n\}$ 无穷多项，则任选其中一区间为 $[a_1,b_1]$），再将 $[a_1,b_1]$ 分成二等份，取其含有 $\{x_n\}$ 中无穷多项的区间为 $[a_2,b_2]$，这样一直继续进行下去，我们得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$，其中每个闭区间都含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项，且满足：$[a_n,b_n]\supseteq[a_{n+1},\ b_{n+1}]$

$(n=1,2,\cdots)$，及$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$。

任取$x_{n_1}\in\{x_n\}\cap[a_1,b_1]$，$x_{n_2}\in\{x_n\}\cap[a_2,b_2]$，且使得$n_2>n_1$，一般地，任取$x_{n_k}\in\{x_n\}\cap[a_k,b_k]$，使$n_k>n_{k-1}$，这个过程一直进行下去，我们得到$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$。下面证明$\{x_{n_k}\}$收敛。

由于$\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-a_k)=0$，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$k_0$，当$k\geqslant k_0$时，$b_k-a_k<\varepsilon$，由$\{x_{n_k}\}$的取法及$[a_k,b_k]\supseteq[a_{k+1},b_{k+1}]$知，当$k_1$，$k_2>k_0$时

$$x_{n_{k_1}}\in[a_{k_0},b_{k_0}],\quad x_{n_{k_2}}\in[a_{k_0},b_{k_0}]$$

所以
$$|x_{n_{k_1}}-x_{n_{k_2}}|\leqslant b_{k_0}-a_{k_0}<\varepsilon$$

由柯西收敛原理知，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$存在。故$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$。

(6)⇒(1)

设$\{x_n\}$单调上升有界，由命题(6)知，存在$\{x_n\}$的收敛子列$\{x_{n_k}\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$。由数列极限的定义知，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$k_0$，当$k\geqslant k_0$时

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$$

显然由$\{x_n\}$单调上升及$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=a$知

$$x_n\leqslant a\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

取$N=n_{k_0}$，则当$n>N$时

$$|x_n-a|=a-x_n\leqslant a-x_{n_{k_0}}<\varepsilon$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

由于以上六个命题在数学分析中所具有的重要作用，我们不仅需要记住这些命题的结论，而更重要的是灵活掌握这些命

题的证明技巧和方法，下面仅举一例说明其用法。

例 8 设 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a, b]$ 上单增，且 $f(a)>a$，$f(b)<b$，则存在 $c\in(a, b)$，使 $f(c)=c$。

证 将 $[a, b]$ 区间分成二等分，如果满足条件 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{a+b}{2}$，则命题结论成立。否则，若有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{a+b}{2}$，则令 $a_1=\frac{a+b}{2}$，$b_1=b$；若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{a+b}{2}$，则令 $a_1=a$，$b_1=\frac{a+b}{2}$。

同样，再将 $[a_1, b_1]$ 分成二等份，如果满足条件 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=\frac{a_1+b_1}{2}$，则命题结论成立。否则，若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)>\frac{a_1+b_1}{2}$，则令 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=b_1$；如果有 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<\frac{a_1+b_1}{2}$，则令 $a_2=a_1$，$b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$。这样一直进行下去。如果这个过程进行到某一时刻，使 $f\left(\frac{a_n+a_n}{2}\right)=\frac{a_n+b_n}{2}$，则命题结论成立。如果对一切正整数 n，都有 $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\neq\frac{a_n+b_n}{2}$，我们可得到一闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，满足：

(i) $[a_n, b_n]\supseteq[a_{n+1}, b_{n+1}]$

(ii) $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ $(n=1, 2, \cdots)$

(iii) $f(a_n)>a_n$，$f(b_n)<b_n$

由区间套定理知，存在 $c\in[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, \cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=c$

由于 $f(x)$ 单增，所以 $f(a_n)\leqslant f(c)\leqslant f(b_n)$，故由 a_n，b_n 的取法得

$$a_n<f(a_n)\leqslant f(c)\leqslant f(b_n)<b_n$$

令 $n\to\infty$ 得

$$f(c)=c$$

故命题结论成立。

练　习　题

1. 用数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\quad$（$a$为常数）；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\quad$（$a>1$，$k$为常数）；

(4) $\lim nq^n=0\quad(|q|<1)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$。

提示：$1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{k+1}{k}\cdot\dfrac{k-1}{k}$ 。

2. 若 $x_n\geqslant0\ (n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$。

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\quad(a>0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$。

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{x_n}=a^b\quad(a>0,\ a\neq1)$。

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-a}{x_n+a}=0\quad(a\neq0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

6. 设 $x_n>0\quad(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则存在无限个 n，使$x_n>x_{n+k}\quad(k=1,2,\cdots)$。

7. 设 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 有定义，并且对 $[a, b]$ 上任何一点 x，存在 x 的某个邻域 Ox，使得 $f(x)$ 在 Ox 有界，试证 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 有界。

8. 设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都是有界数列，试证存在 n_k（$k=1, 2, \cdots$），使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ 及 $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$ 同时存在。

9. 若 $x_n\in(a, b)$，(a，b 有限，$n=1, 2, \cdots$)，$\{f(x_n)\}$ 有界，则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ 及 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$ 都存在。

10. 用区间套定理证明有界非空数集必有上、下确界。

11. 用有限覆盖定理证明有界非空数集有上、下确界。

12. 用有限覆盖定理证明区间套定理。

§1.2 数列极限的运算法则

基础理论

1. 若数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都收敛，则它们的和与差 $\{x_n\pm y_n\}$ 也收敛，并且有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n$$

2. 若数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都收敛，则 $\{x_n\cdot y_n\}$ 也收敛，并且

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n$$

3. 若 $\{x_n\}$ 为有界数列，$\{y_n\}$ 为无穷小量，则它们的积 $\{x_n\cdot y_n\}$ 也是无穷小量。

4. 若 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$，则 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$$

利用极限定义证明数列$\{x_n\}$的极限是a，必须有两个不可缺少的条件：（1）$\{x_n\}$的极限必须存在，（2）a是给定的一个实数。有了上面两个条件后，再用极限的定义验证其结论的正确性。但有些数列其极限的存在性并不是显而易见的，因此其极限也就无法由定义直接证明。此时，我们可以对该数列的一般项x_n，通过恒等变形，使之化为几个较简单的数列的和、差、积或商，再运用极限的运算法则求出极限。

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$。

解 设 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，则

$$\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_n&=x_n-\frac{1}{2}x_n\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)\\&\quad-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{2}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

故

$$x_n=1-\frac{2n-1}{2^n}+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)$$

$$=1-\frac{2n-1}{2^n}+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=3-\frac{2n-1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-2}}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$。

例2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$。

解 由于对任意的正整数 k，有

$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

所以

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

$$=\frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}\cdot\frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}$$

$$\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+1)}$$

$$\cdot\frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)\cdot\cdots\cdot(n^2+n+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)\cdot\cdots\cdot(n^2-n+1)}$$

由于对任意的正整数 k，有

$$(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+k+1$$

因此

$$\frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)\cdot\cdots\cdot(n^2+n+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)\cdot\cdots\cdot(n^2-n+1)}$$

$$=\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}=\frac{n^2+n+1}{3}$$

故

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\frac{2}{3}$$

例 3 设 $x_1=a$，$x_2=b$，当 $n>2$ 时，$x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$。试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求出其值。

证 因为 $x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$，所以

$$x_n-x_{n-1}=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}-x_{n-1}$$

$$=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})$$

故递推可得

$$x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(x_{n-2}-x_{n-3})$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2-x_1)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b-a)$$

因此

$$x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2-x_1)+x_1$$

$$=\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}+\cdots+1\right](b-a)+a$$

$$=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right](b-a)+a$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，且

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{2}{3}(b-a)+a=\frac{a+2b}{3}$$

例 4 设 $x_1=a$，$y_1=b$，$z_1=c$，$x_{n+1}=\frac{y_n+z_n}{2}$，$y_{n+1}=\frac{z_n+x_n}{2}$，$z_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ （$n=1, 2, \cdots$）。试证

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty} z_n=\frac{1}{3}(a+b+c)。$$

证 因为

$$x_n-y_n=\frac{y_{n-1}+z_{n-1}}{2}-\frac{z_{n-1}+x_{n-1}}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-y_{n-1})$$

故递推可得 $x_n-y_n=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-y_{n-1})$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}(x_{n-2}-y_{n-2})$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_1-y_1)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a-b)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$

同理可得

$$\lim_{n\to\infty}(y_n-z_n)=0 \qquad \lim_{n\to\infty}(z_n-x_n)=0$$

因为

$$x_n+y_n+z_n=\frac{y_{n-1}+z_{n-1}}{2}+\frac{z_{n-1}+x_{n-1}}{2}+$$

$$+\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}$$

$$=x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1}$$

故递推可得

$$x_n+y_n+z_n=x_1+y_1+z_1=a+b+c$$

所以

$$\begin{aligned}&(x_n-y_n)-(y_n-z_n)\\&=(x_n+y_n+z_n)-3y_n\\&=(a+b+c)-3y_n\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{3}[(a+b+c)-\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)+\lim_{n\to\infty}(y_n-z_n)]$$

$$=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

同理可得

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{3}(a+b+c) \qquad \lim_{n\to\infty} z_n=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

以上几例都是数列极限存在的情形，有时数列极限并不存在，我们仍可以用数列极限的运算法则来证明其极限不存在。其方法是先假设数列极限存在，再由极限的运算法则得出不合理的结果。

例 5　试证

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\neq 0$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 不存在。

证（1）对任意的正整数 k，取 $n_k=[2k\pi+\frac{\pi}{2}]$，则由

$$|\sin n_k| = |\sin[2k\pi+\frac{\pi}{2}]|$$

$$>\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2}-1)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\neq 0$$

可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\neq 0$。

（2）假设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 存在，则 $\sin(n+2)$ 也存在，且

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n+2)=\lim_{n\to\infty} \sin n$$

故
$$\lim_{n\to\infty} [\sin(n+2)-\sin n]=0$$

由于
$$\sin(n+2)-\sin n=2\sin 1\cos(n+1)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+1)=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n=0$。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin 2n$ 也存在。由于

$$\sin 2n=2\sin n\cos n$$

及
$$\lim_{n\to\infty} \cos n=0 \qquad |\sin n|\leqslant 1$$

故
$$\lim_{n\to\infty} \sin 2n=\lim_{n\to\infty} (2\sin n\cos n)=0$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}\sin n=\lim_{n\to\infty}\sin 2n=0$$
于是 $$\lim_{n\to\infty}(\sin^2 n+\cos^2 n)=0$$
然而这是不可能的，因为对任意的正整数 n，都有 $\sin^2 n+\cos^2 n=1$。

例6 试证

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\neq 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$ 不存在。

证 (1) 对任意的正整数 k，取 $n_k=[2k\pi]$， 则由
$$|\cos n_k|=|\cos[2k\pi]|>\cos(2k\pi-1)=\cos 1\neq 0$$
可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\neq 0$。

(2) 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+2)$ 也存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+2)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$，故
$$\lim_{n\to\infty}[\cos(n+2)-\cos n]=0$$
由于
$$\cos(n+2)-\cos n=-2\sin 1\sin(n+1)$$
所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)=0$，从而
$$\lim_{n\to\infty}\sin n=0$$
这与例 5 的结论矛盾，故假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$ 存在是错误的，说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$ 不存在。

例7 试证

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)\neq 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)$ 不存在。

证 (1) 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)=0$，则由

$$\sin^2(2n+1)+\cos^2(2n+1)=1$$

得 $\lim\limits_{n\to\infty}|\cos(2n+1)|=1$。由于

$$\sin(2n+3)=\sin(2n+1)\cos 2+\cos(2n+1)\sin 2$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|\sin(2n+1)|&=\lim_{n\to\infty}|\sin(2n+3)|\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}|\cos(2n+1)\sin 2|-\\&\quad\lim_{n\to\infty}|\sin(2n+1)\cos 2|\\&=\lim_{n\to\infty}|\cos(2n+1)\sin 2|\\&=\sin 2\neq 0\end{aligned}$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)=0$ 的假设矛盾，于是

$$\lim_{n\to\infty}\sin(2n+1)\neq 0$$

（2）假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)$ 存在。在单位圆周上分别取以 $\frac{\pi}{2}$、$\frac{3\pi}{2}$ 两点为中点，弧长为 $\frac{2\pi}{3}$ 的两弧段，由于数列 $\{2n+1\}$ 相邻两项之差为 2，又 $2<\frac{2\pi}{3}$，所以数列 $\{2n+1\}$ 有无穷多项落在以 $\frac{\pi}{2}$ 为中点，弧长为 $\frac{2\pi}{3}$ 的弧段上，设 $\{2n+1\}$ 中的这些项为 $\{2n_k+1\}$。则

$$\sin(2n_k+1)\geqslant\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

由于 $\{2n_k+1\}$ 是 $\{2n+1\}$ 的子列，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin(2n+1)=\lim_{k\to\infty}\sin(2n_k+1)\geqslant\frac{1}{2}\quad(1.2.1)$$

同理，$\{2n+1\}$ 也存在子列 $\{2m_k+1\}$，使 $2m_k+1$（$k=1,2,\cdots$）都落在以 $\frac{3\pi}{2}$ 为中点，弧长为 $\frac{2\pi}{3}$ 的弧段上。因此

$$\sin(2m_k+1)\leqslant\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \sin(2n+1) = \lim_{k\to\infty} \sin(2m_k+1) \leqslant -\frac{1}{2} \qquad (1.2.2)$$

显然（1.2.1），（1.2.2）两式是矛盾的，说明假设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n+1)$ 存在是错误的。于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n+1)$ 不存在。

顺便指出，可以用例 7 的类似方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin 2n$，$\lim\limits_{n\to\infty} \cos(2n+1)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2n$ 均不存在。

例 8 试证

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 \neq 0$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2$ 不存在。

证 （1）假设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 = 0$。由于对任意的整数 n 都有 $\sin n\pi = 0$，所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$（$\varepsilon < \frac{1}{4}$），必存在正整数 N，当 $k \geqslant N$ 时，对每一个 k 均存在相应的正整数 n_k，使

$$|k^2 - n_k\pi| < \frac{\varepsilon}{2}$$

不妨假设 $\{n_k\}$ 是严格单增的。由此

$$\begin{aligned} &|(2k+1) - (n_{k+1} - n_k)\pi| \\ &= |[(k+1)^2 - n_{k+1}\pi] - (k^2 - n_k\pi)| < \varepsilon \end{aligned}$$

令 $m_k = n_{k+1} - n_k$，则

$$|(2k+1) - m_k\pi| < \varepsilon$$

于是得 $$\lim_{k\to\infty} \sin(2k+1) = \lim_{k\to\infty} \sin(m_k\pi) = 0$$

这与例 7 的结论相矛盾。从而说明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 \neq 0$

（2）假设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2$ 存在，由于

$$\cos(2n^2) = 1 - 2\sin^2 n^2$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(2n^2)$ 存在。

由（1）知$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2\neq 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin(2n)^2=\lim_{n\to\infty}\sin n^2\neq 0 \qquad (1.2.3)$$

由于

$$\sin(2n)^2=\sin 2(2n^2)=2\sin(2n^2)\cos(2n^2) \qquad (1.2.4)$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n^2)\neq 0$。事实上，假设$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n^2)=0$，则由式（1.2.4）得$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n^2)=0$，这与式(1.2.3)矛盾。

因为$\sin(2n^2)=\dfrac{\sin(2n)^2}{2\cos(2n^2)}$，所以由$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2\neq 0$及$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n^2)\neq 0$得$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n^2)$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n^2)\neq 0$。

由于$\sin(2n^2)=2\sin n^2\cos n^2$，所以

$$\cos n^2=\frac{\sin(2n^2)}{2\sin n^2}$$

故由$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n^2)$、$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2$均存在及$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2\neq 0$

知$\lim\limits_{n\to\infty}\cos n^2$存在。从而$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)^2$及$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)^2$均存在。由于

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)&=\sin[(n+1)^2-n^2]\\&=\sin(n+1)^2\cos n^2-\cos(n+1)^2\sin n^2\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)$存在。这与例7的结论矛盾，说明$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2$不存在。

用类似例8的方法同样可以证明出$\lim\limits_{n\to\infty}\cos n^2$亦不存在。

练 习 题

1．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$。

2．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$。

提示：设$s_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，则 $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=s_{2n}-4s_n$。

3. 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+c})=0$ （c为常数）。

4. 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\pi\sqrt{n^2+n})=0$。

5. 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p})=0$，其中 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$。

提示：对任何正整数 k，$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})=0$ 及 $a_0\sqrt{n}+a_2\sqrt{n}+\cdots+a_p\sqrt{n}=0$。

§1.3 数列极限存在的判别方法

基础理论

1. 设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$是三个数列，如果存在正整数N，使得当$n>N$时有$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$（有限或正负无穷），则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$。这一结论称为**两头夹定理**。

2. 若$\{x_n\}$单调上升（下降）有上（下）界，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

3. 设$x_n>0$（$n=1,2,\cdots$），如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a$（$a$有限或无穷），则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$。

4. 设$\{y_n\}$严格单增（或存在N，当$n>N$时，$\{y_n\}$严格单增）趋向于正无穷，，且

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=a$。

5. 设$\{x_n\}$是一个数列，分别称$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{m\geqslant n}x_m$及

$\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{m\geq n}x_m$为$\{x_n\}$的上极限和下极限，并分别记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$和$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$充要条件是$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=a$。

6. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的充要条件是$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_k}\}$都有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$。

7. $\{x_n\}$收敛的充要条件是对任给的$\varepsilon>0$，存在正整数N，当m，$n>N$时，$|x_m-x_n|<\varepsilon$。

我们知道，若$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm\alpha_n)=a$。利用数列的这一性质可以解决如下问题：设$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，$\{y_n\}$的极限不易直接求出，但$\{x_n\}$和$\{z_n\}$的极限是已知的，或非常容易求得，且$\{x_n\}$与$\{z_n\}$仅差一个无穷小量，这样我们就可以由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$很方便地得到$\{y_n\}$的极限。但需要指出的是：在一般情况下，$\{x_n\}$及$\{z_n\}$并不是事先就已经给出，而是根据$\{y_n\}$的各项适当缩小或放大而得到的简单数列。在放大或缩小的过程中，要始终掌握如下准则：变动$\{y_n\}$中繁锁的无穷小量部分，使其保持极限值不变。

例1 设$\alpha<1$，试证$\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=0$。

证 当$\alpha\leqslant0$时，显然结论成立。

当$0<\alpha<1$时，由于

$$0<(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right]$$

$$<n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-a}}=0$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^a-n^a]=0$。

例2 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，试证

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e。$$

证 显然只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$ 时都有

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$ 即可

(1) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 时，设 $[x_n]=M_n$，则

$M_n\leqslant x_n\leqslant M_n+1$，故

$$\frac{1}{M_n+1}\leqslant\frac{1}{x_n}\leqslant\frac{1}{M_n}$$

因此

$$\left(1+\frac{1}{M_n+1}\right)^{M_n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{M_n+1}}\leqslant\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{M_n}\right)^{M_n}\cdot\left(1+\frac{1}{M_n}\right)$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{M_n+1}\right)^{M_n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{M_n+1}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{M_n+1}\right)^{M_n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{M_n+1}}$$

$$=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{M_n}\right)^{M_n}\cdot\left(1+\frac{1}{M_n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{M_n}\right)^{M_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{M_n}\right)$$

$$=e$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$$

（2）当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ 时，令 $y_n=-x_n$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$，故由（1）得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{-y_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_n}{y_n-1}\right)^{y_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)$$

$$=e$$

如果数列 $\{x_n\}$ 由 $x_{n+1}=f(x_n)$（$n=1，2，\cdots$）的形式给出，且 $\{x_n\}$ 是单调有界数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$（$a$是待定值），然后对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的两边分别取极限，得

到一个含有未知量 a 的方程，通过解方程及由题设条件可唯一确定出 $\{x_n\}$ 的极限 a 来。

例3 设 $x_1=\sqrt{a}$，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，其中 $a>0$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求出其值。

证 显然 $x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{个}}$，

$x_{n+1}=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n+1\text{个}}$， 可以看出 $x_{n+1}>x_n$

$(n=1,2,\cdots)$，即 $\{x_n\}$ 单增，由

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$$

得

$$x_{n+1}^2=a+x_n$$

又由 $x_n<x_{n+1}$ 得

$$x_n^2<a+x_n$$

故

$$x_n<\frac{a}{x_n}+1$$

因为 $x_n\geqslant x_1=\sqrt{a}$ $(n=1,2,\cdots)$，所以

$$\frac{a}{x_n}\leqslant\sqrt{a}$$

故由 $x_n<\dfrac{a}{x_n}+1$ 得

$$x_n<\sqrt{a}+1$$

从而 $\{x_n\}$ 有上界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=b$，对$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$两边取极限得

$$b=\sqrt{a+b}$$

解这个方程得

$$b=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$$

因为$x_n\geqslant\sqrt{a}>0$（$n=1，2，\cdots$），故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n\geqslant 0$，所以$b\geqslant 0$，从而$b=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$舍去，于是

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

例4 设$a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$（$n=1，2，\cdots$），试证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其值。

证 可归纳证明，$x_n>0$（$n=1，2，\cdots$），因为

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)=\frac{x_n^2+a}{2\sqrt{a}\cdot x_n}\cdot\sqrt{a}$$

而 $x^2_n+a\geqslant 2\sqrt{a}\,x_n$

所以 $x_{n+1}\geqslant\sqrt{a}$

故$\{x_n\}$有下界。

因为 $$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)$$

而 $\frac{a}{x_n^2}\leqslant 1$，所以 $\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant 1$

故$\{x_n\}$单减，因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在。

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，由$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$两边取极限得

$$b=\frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$$

解这个方程得 $b=\pm\sqrt{a}$

故由 $x_n>0$（$n=1,2,\cdots$）得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$。

为了证明数列$\{x_n\}$的单调性，有时直接证明$x_{n+1}-x_n\geqslant 0$（或$\leqslant 0$）及$\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant 1$（或$\leqslant 1$）是很困难的，可以应用导数理论中"若$f'(x)\geqslant 0$（或$\leqslant 0$），则$f(x)$单调上升（或单调下降）"的结论，来证明数列的单调性。

例 5 设$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$（$n=1,2,\cdots$），试证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其值。

证 易归纳证明：$x_n>0$（$n=1,2,\cdots$）。

因为

$$0<\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}<\frac{3(3+x_n)}{3+x_n}=3$$

所以$\{x_n\}$有界。

下面证明$\{x_n\}$的单调性。

$$x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-x_n=\frac{3-x_n^2}{3+x_n}$$

令 $f(x)=\frac{3-x^2}{3+x}$（$x>0$），则$f'(x)=\frac{-(x^2+6x+3)}{(3+x)^2}<0$，所以$f(x)$单调下降。

由于$x=\sqrt{3}$时，$f(x)=0$，所以当 $0<x<\sqrt{3}$时，$f(x)>0$；当 $x>\sqrt{3}$时，$f(x)<0$。

设 $\varphi(x)=\frac{3(1+x)}{3+x}$，则 $\varphi'(x)=\frac{6}{(3+x)^2}>0$，所以$\varphi(x)$单调上升。故当$0<x\leqslant\sqrt{3}$时，$\varphi(x)\leqslant\frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}$。当 $x>\sqrt{3}$ 时，$\varphi(x)>\dfrac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3}$。因此，若 $0<x_1\leqslant\sqrt{3}$，则 $0<x_{n+1}\leqslant\sqrt{3}$（$n=1,2,\cdots$）；若 $x_1>\sqrt{3}$，则 $\sqrt{3}<x_{n+1}<3$（$n=1,2,\cdots$），从而，当 $0<x_1\leqslant\sqrt{3}$ 时，$x_{n+1}-x_n=f(x_n)\geqslant 0$，故 $\{x_n\}$ 单调上升；当 $x_1>\sqrt{3}$ 时，$x_{n+1}-x_n=f(x_n)<0$，故 $\{x_n\}$ 单调下降。所以 $\{x_n\}$ 收敛。

由 $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ 两边取极限，解所得方程，且由条件 $x_n>0$（$n=1,2,\cdots$）得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$。

为了证明 $\{x_n\}$ 收敛，有时需要证明 $\{x_n\}$ 的单调性。这里我们只关心 $\{x_n\}$ 是否单调，至于 $\{x_n\}$ 是单增还是单减是无关紧要的，因此只要能证明 $x_{n+2}-x_{n+1}$ 与 $x_{n+1}-x_n$ 符号是否一致就可以了，上面的例5中证明 $\{x_n\}$ 的单调性就可以采用这种方法，现证明如下：

因为

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{3-x_{n+1}^2}{3+x_{n+1}}$$

$$=\frac{3-\left[\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}\right]^2}{3+\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}}$$

$$=\frac{3-x_n^2}{(3+x_n)(2+x_n)}$$

又 $x_n>0$（$n=1,2,\cdots$），所以

$$\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=\frac{\dfrac{3-x_n^2}{(3+x_n)(2+x_n)}}{\dfrac{3-x_n^2}{3+x_n}}$$

$$=\frac{1}{2+x_n}>0$$

故$x_{n+2}-x_{n+1}$与$x_{n+1}-x_n$符号相同，因此$\{x_n\}$为单调数列。至于$\{x_n\}$的有界性及其极限值的求法可参阅例5的证明，这里从略。

例6 设$x_0>0$，$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}$（$a>0$），试证$\{x_n\}$收敛，并求此极限。

证 当$x_0^2<a$时，可以证明对任意正整数n，都有$x_n^2<a$，事实上，设$\varphi(x)=x\left(\frac{x+3a}{3x+a}\right)^2$（$0<x<a$），则

$$\varphi'(x)=3\left(\frac{x-a}{3x+a}\right)^2\cdot\frac{x+3a}{3x+a}>0$$

因此$\varphi(x)$单调上升。

设k为非负整数，$x_k^2<a$，则

$$x_{k+1}^2=x_k^2\left(\frac{x_k^2+3a}{3x_k^2+a}\right)^2=\varphi(x_k^2)<\varphi(a)=a$$

从而对任意的正整数n，都有$x_n^2<a$

又 $$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_n^2+3a}{3x_n^2+a}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8a}{3x_n^2+a}\right)$$

$$>\frac{1}{3}\left(1+\frac{8a}{3a+a}\right)=1$$

故$\{x_n\}$单调上升，从而$\{x_n\}$收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，则对$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}$两边取极限得

$$b=\frac{b(b^2+3a)}{3b^2+a}$$

由于$\{x_n\}$单调上升，且$x_0>0$，故$b>0$，从而由方程$b=\frac{b(b^2+3a)}{3b^2+a}$得

$$b=\sqrt{a}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$

同理可证：

当 $x_0^2>a$ 时，$\{x_n\}$ 单调下降，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$。

当 $x_0^2=a$ 时，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$ 成立。

例 7 设 $x_1=\ln a$，$x_{n+1}=x_n+\ln(a-x_n)$（$n=1,2,\cdots$），试证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求出其值。

证 设 $f(x)=x+\ln(a-x)\quad(x<a)$，则

$$f'(x)=1-\frac{1}{a-x}=\frac{a-1-x}{a-x}$$

所以当 $x<a-1$ 时，$f'(x)>0$，得 $f(x)$ 单增；当 $x>a-1$ 时，$f'(x)<0$，得 $f(x)$ 单减，故 $f(a-1)$ 是 $f(x)$ 的最大值，

即
$$f(x)\leqslant f(a-1)=a-1$$

所以

$$x_2=f(x_1)=f(\ln a)\leqslant a-1$$

可归纳证明，对任意的正整数 n，都有

$$x_{n+1}=f(x_n)\leqslant a-1$$

故 $\{x_n\}$ 有上界

因为当 $x\leqslant a-1$ 时，$\ln(a-x)\geqslant 0$，所以 $f(x)\geqslant x$，故

$$x_{n+1}=f(x_n)\geqslant x_n$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$，则对 $x_{n+1}=x_n+\ln(a-x_n)$ 两边取极限得

$$b=b+\ln(a-b)$$

故 $b=a-1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a-1$。

需要特别指出的是：如果 $\{x_n\}$ 以 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的形式给出，欲求 $\{x_n\}$ 的极限，必须首先证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的存在性，才能对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的两边取极限，再解方程确定出 $\{x_n\}$ 的极限来。若不首先证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的存在性，就直接运用上面讲到的方法求方程的解，这样得出的解不一定就是 $\{x_n\}$ 的极限。例如，设 $x_n=2^n$（$n=1,2,\cdots$），则 $x_{n+1}=2x_n$。若设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，对 $x_{n+1}=2x_n$ 两边取极限，可解出 $a=0$ 的结果，显然0不是 $\{x_n\}$ 的极限。

再例如，设 $x_n=(-1)^n$（$n=1,2,\cdots$），则 $x_{n+1}=-x_n$。如果设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，对 $x_{n+1}=-x_n$ 两边取极限，可解出 $a=0$，显然0不是 $\{x_n\}$ 的极限。

有时数列 $\{x_n\}$ 是由 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的形式给出，$\{x_n\}$ 不一定单调，或即使单调但很不易证明，可是 $\{x_n\}$ 的极限可能是存在的。此时可采用下面的方法：首先证明 $x=f(x)$ 的解存在，然后再证明这个解就是 $\{x_n\}$ 的极限。下面例子就是采用这种方法证明的。

例 8 设 x_0 为任意一个实数，$x_{n+1}=\cos x_n$（$n=0,1,2,\cdots$），试证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，且其极限与 x_0 无关。

证 设 $f(x)=x-\cos x$，则 $f'(x)=1+\sin x\geqslant 0$，且 $1+\sin x$ 在任何有限的区间内只有有限个零点，故 $f(x)$ 严格单调上升。

因为 $f(0)<0$，$f(1)>0$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，所以存在唯一一点 ξ（$0<\xi<1$），使 $f(\xi)=0$ 即 $\cos\xi=\xi$。

下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$。

显然，当 $n\geqslant 2$ 时，$0\leqslant x_n\leqslant 1$，因为

$$|x_{n+1}-\xi| = |\cos x_n-\xi| = |\cos x_n-\cos\xi|$$

且 $\cos x$ 可导，故由微分中值定理知，存在 η（η 位于 x_n，ξ 之间），使

$$|\cos x_n-\cos\xi| = |\sin\eta| \cdot |x_n-\xi| \leqslant \sin 1 \cdot |x_n-\xi|$$

即
$$|x_{n+1}-\xi| \leqslant \sin 1 \cdot |x_n-\xi|$$

可归纳证明：对任意大于 1 的正整数 n，都有

$$|x_n-\xi| \leqslant (\sin 1)^{n-2} |x_2-\xi|$$

由于 $0<\sin 1<1$，所以 $|x_n-\xi| \to 0$（$n\to\infty$），从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$，且显然 ξ 与 x_0 无关。

利用已知的结论，由数列 $\{x_n\}$ 的极限求另一与 $\{x_n\}$ 有关的数列 $\{y_n\}$ 的极限，这是求数列极限的常用方法。这样借助于已知结论，可以避免繁杂的证明和运算，能较容易地得到所需要的结果。下面举几例说明这种方法的应用。

例 9 试证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$。

证 设 $x_n=\dfrac{n^n}{n!}$，则 $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}=\sqrt[n]{x_n}$，因为

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e}\ (n\to\infty)$$

所以由基础理论 3 知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$。

例10 设 $0<x_1<1$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$（$n=1,2,\cdots$），试证 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$。

证 易归纳证明 $0<x_n<1$（$n=1,2,\cdots$），所以

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_n(1-x_n)}{x_n}=1-x_n<1$$

故 $\{x_n\}$ 严格单减有界，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在。

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，由$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$两边取极限得

$$a=a(1-a)$$

解这个方程得 $a=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，从而$\{\frac{1}{x_n}\}$严格单增趋于$+\infty$，由基础理论 4 得

$$\lim_{n\to\infty} nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\cdot x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2(1-x_n)}{x_n-x_n(1-x_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-x_n)=1$$

由基础理论 4 的特殊情况得出的"若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$"的结论，在数列极限的明证中也经常被利用。

例 11 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$，试证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=ab.$$

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，故 $\{x_n\}$ 有界，设 $|x_n|\leqslant M$ $(n=1, 2, \cdots)$，则

$$\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}$$

$$=\frac{x_1(y_n-b)+x_2(y_{n-1}-b)+\cdots+x_n(y_1-b)}{n}$$

$$+\frac{b(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}|y_n-b|=0$ 及 $|x_n|\leqslant M$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 得

$$\left|\frac{x_1(y_n-b)+x_2(y_{n-1}-b)+\cdots+x_n(y_1-b)}{n}\right|$$

$$\leqslant M\frac{|y_n-b|+|y_{n-1}-b|+\cdots+|y_1-b|}{n}$$

$$\to 0 \quad (n\to\infty)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1(y_n-b)+x_2(y_{n-1}-b)+\cdots+x_n(y_1-b)}{n}$$

$$=0$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1(y_n-b)+x_2(y_{n-1}-b)+\cdots+x_n(y_1-b)}{n}$$

$$+\lim_{n\to\infty}b\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

$$=0+b\cdot a=ab$$

例12 设 $a_0=1$；$a_n=\sin a_{n-1}$（$n=1,2,\cdots$），试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+a)$ 存在，并求出其值，其中 a 为常数。

证 由归纳法易知，对任意正整数 n，都有 $0<a_n<1$。因为当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$0<\sin x<x$，所以

$$a_n=\sin a_{n-1}<a_{n-1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

因此 $\{a_n\}$ 单减有界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$，则由 $a_n=\sin a_{n-1}$ 两边取极限得

$$b=\sin b$$

所以 $b=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$$

从而

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k+a)\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a)+(a_2+a)+\cdots+(a_n+a)}{n}\\=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+a\right)\\=&\,a\end{aligned}$$

例13 设 $x_n\geqslant 0$（$n=1,2,\cdots$），且对任意的数列 $\{y_n\}$ 满足 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。

证 设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=a$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=b$。假设 $a>b$，由于 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=b$，故存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=b$

令

$$y_n=\begin{cases}1 & n=n_k\text{时}\\0 & n\neq n_k\text{时}\end{cases}$$

则
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=b$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n=a\cdot 1=a$$
此与条件$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,y_n$相矛盾，故
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n$$
从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

例14 设$\{a_n\}$有界，则$\lim\limits_{n\to\infty}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}$存在，且
$$\lim_{n\to\infty}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}=\sup\{|a_n|\}。$$
证 设$\sup\{|a_n|\}=a$，分两种情形证明：

（1）当$a=0$时，则对任意的正整数n，都有$a_n=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}=0$。

（2）当$a>0$时，由上确界的定义知，对任给的$\varepsilon>0$（不妨设$\varepsilon<a$），必存在正整数N，使$|a_N|>a-\varepsilon$。故当$n>N$时 $(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}\geqslant|a_N|>a-\varepsilon$

从而
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}\geqslant a-\varepsilon$$
由ε的任意性得
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}\geqslant a$$
另一方面，由于
$$(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}\leqslant(na^n)^{1/n}=a\sqrt[n]{n}$$
所以
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a\sqrt[n]{n}=a$$
故
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}$$
$$\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}$$

由上、下极限的定义显然有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ (|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}$$

$$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}$$

故

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_n|^n)^{1/n}$ 存在且等于 a。

例15 设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 严格单增，若对于 $x_n\in[a,b]$ $(n=1,2,\cdots)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$ 成立，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

证 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a$，由于 $x_n\in[a,b]$，所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n>a$，设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=c$，则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c$$

故存在 k_0，当 $k>k_0$ 时，$x_{n_k}>\dfrac{a+c}{2}$，由于 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 严格单增，故当 $k>k_0$ 时

$$f(x_{n_k})>f\left(\frac{a+c}{2}\right)>f(a)$$

从而

$$f(x_{n_k})-f(a)>f\left(\frac{a+c}{2}\right)-f(a)$$

另一方面，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$，所以对于 $\varepsilon=f\left(\dfrac{a+c}{2}\right)-f(a)>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时

$$f(x_n)-f(a)<f\left(\frac{a+c}{2}\right)-f(a)$$

从而当 k 充分大时

$$f(x_{n_k})-f(a)<f\left(\frac{a+c}{2}\right)-f(a)$$

此式与$f(x_{n_k})-f(a)>f\left(\frac{a+c}{2}\right)-f(a)$矛盾，故假设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n\neq a$ 是错误的，从而得到$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$。

利用“$\lim\limits_{k\to\infty} x_n=a$ 充分必要条件是对于$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_k}\}$，都有$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$”的结论的否定命题证明$\{x_n\}$的极限不存在，或用反证法证明$\{x_n\}$的极限存在有时是非常方便的。

例16 设$\{x_n\}$有界，且满足条件：对任给定的$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$m>n>N$时，$x_m-x_n<\varepsilon$，则$\{x_n\}$收敛。

证 假设$\{x_n\}$不收敛，则必存在$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{n_k}\}$，$\{x_{n'_k}\}$及两个实数a，b（$a\neq b$），使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=a \qquad \lim_{k\to\infty} x_{n'_k}=b$$

不妨设$a<b$，则存在正整数k_0，当$k>k_0$时

$$|x_{n_k}-a|<\frac{b-a}{4} \qquad |x_{n'_k}-b|<\frac{b-a}{4}$$

同时成立，所以

$$x_{n_k}<a+\frac{b-a}{4} \qquad x_{n'_k}>b-\frac{b-a}{4}$$

故当k_1，$k_2>k_0$时

$$x'_{n_{k_1}}-x_{n_{k_2}}>\left(b-\frac{b-a}{4}\right)-\left(a+\frac{b-a}{4}\right)$$

$$=\frac{b-a}{2}$$

另一方面，取$\varepsilon=(b-a)/2$，则由题设条件知，存在正整数N，当$m>n>N$时

$$x_m-x_n<\frac{b-a}{2}$$

因此取充分大的k_1，k_2，使k_1，$k_2>k_0$，且$n'_{k_1}>n_{k_2}>N$，则

$$x_{n'_{k_1}}-x_{n_{k_2}}<(b-a)/2$$

此式与$x_{n'_{k_1}}-x_{n_{k_2}}>\frac{b-a}{2}$矛盾，故$\{x_n\}$收敛。

在命题的证明中，有时利用基础理论6的特款"$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$"更方便些。此方法不仅可以证明$\{x_n\}$发散及用反证法证明$\{x_n\}$收敛，还可以直接证明$\{x_n\}$的收敛性。

例17 设$x_n=(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n}{n}\right]$（$n=1,2,\cdots$），试证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求出其值。

证 因为

$$x_{2n}=\left(\frac{1}{2n}-\frac{2}{2n}\right)+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2n}-\frac{2n}{2n}\right)$$

$$=-\frac{n}{2n}=-\frac{1}{2}$$

$$x_{2n+1}=-\left[\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{2}{2n+1}\right)+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2n-1}{2n+1}-\frac{2n}{2n+1}\right)+\frac{2n+1}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{n}{2n+1}-\frac{2n+1}{2n+1}$$

$$=-\frac{n+1}{2n+1}\longrightarrow-\frac{1}{2}(n\to\infty)$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1/2$。

例18　设 $a>1$，$x_1>\sqrt{a}$，$x_{n+1}=\dfrac{a+x_n}{1+x_n}$ （$n=1,2,\cdots$）．试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$。

证　因为 $\left(\dfrac{a+x}{1+x}\right)'=\dfrac{1-a}{(1+x)^2}<0$，所以 $\dfrac{a+x}{1+x}$ 严格单调下降。

下面用归纳法证明 $\{x_{2n}\}$ 有上界，$\{x_{2n+1}\}$ 有下界。

由于　$x_1>\sqrt{a}$，且　$\dfrac{a+x}{1+x}$　单调下降，所以

$$x_2=\frac{a+x_1}{1+x_1}<\frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}=\sqrt{a}$$

假设 $x_{2k-1}>\sqrt{a}$，$x_{2k}<\sqrt{a}$，则

$$x_{2k+1}=\frac{a+x_{2k}}{1+x_{2k}}>\frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}=\sqrt{a}$$

$$x_{2k+2}=\frac{a+x_{2k+1}}{1+x_{2k+1}}<\frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}=\sqrt{a}$$

因此对一切正整数 n，都有

$$x_{2n}<\sqrt{a}\qquad\qquad x_{2n+1}>\sqrt{a}$$

再证明 $\{x_{2n}\}$ 单增，$\{x_{2n+1}\}$ 单减。

$$x_{2n+1}-x_{2n-1}=\frac{a+x_{2n}}{1+x_{2n}}-x_{2n-1}$$

$$=\frac{a+\dfrac{a+x_{2n-1}}{1+x_{2n-1}}}{1+\dfrac{a+x_{2n-1}}{1+x_{2n-1}}}-x_{2n-1}$$

$$=\frac{2a+(1+a)x_{2n-1}}{(1+a)+2x_{2n-1}}-x_{2n-1}$$

$$=\frac{2(a-x_{2n-1}^2)}{(1+a)+2x_{2n-1}}<0$$

同理可证

$$x_{2n+2}-x_{2n}>0$$

故 $\{x_{2n}\}$ 单增，$\{x_{2n+1}\}$ 单减，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$ 都存在。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=B$，由

$$x_{2n+1}=\frac{a+x_{2n}}{1+x_{2n}}$$

及

$$x_{2n}=\frac{a+x_{2n-1}}{1+x_{2n-1}}$$

两边取极限得

$$B=\frac{a+A}{1+A} \qquad A=\frac{a+B}{1+B}$$

解这个方程组得

$$A=B=\pm\sqrt{a}$$

由于 $x_{2n+1}>\sqrt{a}$，所以 $B\geqslant\sqrt{a}$，$A=B=-\sqrt{a}$ 舍去，从而

得
$$\lim_{n\to\infty} x_{2n}=\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}=\sqrt{a}$$

于是
$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}。$$

最后举一个利用柯西收敛原理证明数列收敛的例子。

例19 如果存在常数 M，使得对于一切正整数 n 都有

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant M$$

则 $\{x_n\}$ 收敛。

证 令 $y_n=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$（$n=1,2,\cdots$），则 $\{y_n\}$ 单增有界，故 $\{y_n\}$ 收敛，所以对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 m，$n\geqslant N$ 时

$$|y_m-y_n|<\varepsilon$$

故当 m，$n>N$ 时

$$|x_m-x_n|$$

$$= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)|$$
$$\leqslant |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$
$$= |y_{m-1} - y_{n-1}| < \varepsilon$$

从而 $\{x_n\}$ 收敛。

练 习 题

1. 用“两头夹定理”证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2^n}\right)=0$；

提示：$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2^n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(4) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 k 个正数，试证

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max(a_1, a_2, \cdots, a_k)$。

2. 利用单调有界数列必有极限的定理证明以下数列收敛，并求出其极限。

(1) $x_1=\sqrt{2}$，$x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$ $(n=1, 2, \cdots)$；

(2) $x_0=1$，$x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ $(n=1, 2, \cdots)$。

3. 设 $x_1=a>0$，$y_1=b>0$，$a<b$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}$，$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ $(n=1, 2, \cdots)$，试证 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 的极限存在且相等。

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5+n^4}$。

5. 设 p 为正整数，试证

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\dfrac{n}{p+1}\right)=\dfrac{1}{2}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}=\dfrac{2p}{p+1}$。

6. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})=a$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=a$。

7. 设 $\{x_n\}$ 为有界数列，$a_n=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，试证

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$；

(2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 。

8. 设 $x_n>0$ （$n=1,2,\cdots$），$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，试证存在无限多个下标 n，使 $x_n<x_k$ （$k=1,2,\cdots,n-1$）。

9. 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件：存在实数 $c>0$，$0<r<1$，使得 $|x_{n+1}-x_n|<cr^n$，试证 $\{x_n\}$ 收敛。

10. 设数列 $\{x_n\}$ 满足下面不等式：

$$0\leqslant x_{n+m}\leqslant x_n+x_m\quad (n,\ m=1,2,\cdots)$$

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$ 存在。

11. 若 $x_n>0$ （$n=1,2,\cdots$），则

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$；

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$。

§1.4 数列极限杂题举例

例1 设 $a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），$x_n=\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，$y_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)$，则 $x_ny_n\geqslant 1$（$n=1,2,\cdots$）。

证 令 $b_n=\sqrt{a_n}$, $c_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$, 则

$$b_nc_n=1 \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

由许瓦兹(Schwarz)不等式得

$$\begin{aligned}n^2&=\left(\sum_{k=1}^{n}b_kc_k\right)^2\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}c_k^2\right)\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\\&=nx_n\cdot ny_n\\&=n^2x_ny_n\end{aligned}$$

故
$$x_ny_n\geqslant 1$$

例2 设数列$\{x_n\}$满足条件：$x_{m+n}\leqslant x_m+x_n+a$（$a$为常数），$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=b$（$b$有限或$\pm\infty$），则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=b$。

证 分三种情形证明

（1）当b有限时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=b$，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，存在充分大的正整数$m$，使得

$$\left|\frac{x_m}{m}-b\right|<\varepsilon \qquad \frac{|a|}{m}<\varepsilon$$

同时成立。

令$A=\max(|x_1|,\ |x_2|,\ \cdots,\ |x_{m-1}|)$，取充分大的正整数$n$，使

$$\frac{A}{n}<\varepsilon \qquad \frac{m-1}{n}|b|<\varepsilon$$

设 $n=km+q$（k，q 为非负整数，且 $q<m$），令 $x_0=0$，则

$$x_n=x_{km+q}\leqslant x_{km}+x_q+a$$
$$\leqslant kx_m+x_q+ka$$

从而

$$\frac{x_n}{n}-b\leqslant\frac{kx_m}{km+q}+\frac{x_q}{n}+\frac{ka}{km+q}-b$$
$$=\left(\frac{x_m}{m}-b\right)\frac{km}{km+q}-\frac{q}{km+q}\cdot b$$
$$+\frac{x_q}{n}+\frac{ka}{km+q}$$
$$\leqslant\left|\frac{x_m}{m}-b\right|+\frac{m-1}{n}|b|+\frac{A}{n}+\frac{|a|}{m}$$
$$<4\varepsilon$$

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=b$，故当 n 充分大时

$$\frac{x_n}{n}-b>-\varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=b$。

（2）当 $b=-\infty$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=-\infty$，所以对任意给定的 $M>0$，存在充分大的正整数 m，使得

$$\frac{x_m}{m}<-4M\qquad\frac{|a|}{m}<\frac{M}{2}$$

同时成立。

设 $A=\max(|x_1|，|x_2|，\cdots，|x_{m-1}|)$，取充分大的 n，令 $n=km+q$（k，q 为非负整数，且 $q<m$），使

$$\frac{A}{n}<\frac{M}{2}\qquad\frac{km}{n}>\frac{1}{2}$$

则 $$\frac{x_n}{n} \leqslant \frac{x_m}{m} \cdot \frac{km}{km+q} + \frac{x_q}{km+q} + \frac{ka}{km+q}$$

$$\leqslant \frac{x_m}{m} \cdot \frac{km}{n} + \frac{x_q}{n} + \frac{|a|}{m}$$

$$< -2M + \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = -M$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = -\infty$。

（3）当 $b=+\infty$ 时，由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_n}{n} \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_n}{n} = +\infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = +\infty$$

例3 设 $x_n > 0$（$n=1,2,\cdots$），且满足 $x_{m+n} \leqslant a x_m x_n$（$a>0$ 为常数），试证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ 存在（有限或 $+\infty$）。

证 对 $x_{m+n} \leqslant a x_m x_n$ 两边取对数得

$$\ln x_{m+n} \leqslant \ln x_m + \ln x_n + \ln a$$

由例2知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{n}$ 存在（包括无穷），设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{n} = b$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{x_n} = b$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = e^b$。①

例4 设 a，b 是两个实数，m，n 为整数，且 m，n 不同时为零，试证 $\inf\{|ma+nb|\}=0$。

证 设 $\lambda = \inf\{|ma+nb|\}$。下面分两种情形证明：

（1）若存在 m, n 及 m'，n'（$m=m'$，$n=n'$ 不同时成

---

① 当 $b=-\infty$ 时，令 $e^b=0$；当 $b=+\infty$ 时，令 $e^b=+\infty$，则 $b=\pm\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = e^b$ 的结论仍然成立。

立），使 $ma+nb=m'a+n'b$，则 $m-m'$，$n-n'$ 不同时为零，且

$$|(m-m')a+(n-n')b|=0$$

故 $\lambda=0$。

（2）若对任意二组整数 m，n 及 m'，n'（$m=m'$，$n=n'$ 不同时成立）都有

$$ma+nb\neq m'a+n'b$$

假设 $\lambda>0$，不妨设 $|a|\geqslant|b|$，令 $N=\left[\frac{|a|}{\lambda}+1\right]$。

当 m，n 分别取遍 0，±1，±2，…，$\pm N$ 的一切值时，$ma+nb$ 可得 $(2N+1)^2$ 个不同的值。显然每一个不同值看作数轴上的一个点时，这些点与原点之间的距离 $|ma+nb|$ 都有

$$\begin{aligned}|ma+nb|&\leqslant|ma|+|nb|\\&\leqslant|ma|+|na|\\&=(|m|+|n|)|a|\\&\leqslant 2N|a|\end{aligned}$$

因此，以每点为中心，以 $\frac{\lambda}{2}$ 为半径的开区间都应包含于开区间 $\left(-2N|a|-\frac{\lambda}{2},\ 2N|a|+\frac{\lambda}{2}\right)$ 之中。由 λ 的定义知，这 $(2N+1)^2$ 个开区间互不相交。因而这 $(2N+1)^2$ 个开区间长度之和应不大于开区间 $\left(-2N|a|-\frac{\lambda}{2},\ 2N|a|+\frac{\lambda}{2}\right)$ 的长度。即

$$(2N+1)^2\lambda\leqslant 2\left(2N|a|+\frac{\lambda}{2}\right)$$

从而

$$N\lambda\leqslant|a|-\lambda<|a|$$

故

$$N<\frac{|a|}{\lambda}$$

这与$N=\left[\frac{|a|}{\lambda}+1\right]$相矛盾，故假设$\lambda>0$是错误的，因此应有$\lambda=0$。

例 5 设$\{x_n\}$是一个正数数列，试证

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)\geqslant 1\text{。}$$

证 假设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)<1$，则存在正整数$N$，当$n\geqslant N$时

$$n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)<1$$

因此
$$\frac{x_n}{n}>\frac{1}{n+1}+\frac{x_{n+1}}{n+1}$$

故

$$\frac{x_N}{N}>\frac{1}{N+1}+\frac{x_{N+1}}{N+1}$$

$$\frac{x_{N+1}}{N+1}>\frac{1}{N+2}+\frac{x_{N+2}}{N+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_{N+m}}{N+m}>\frac{1}{N+m+1}+\frac{x_{N+m+1}}{N+m+1}$$

所以对一切正整数m都有

$$\frac{x_N}{N}>\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots$$

$$+\frac{1}{N+m+1}+\frac{x_{N+m+1}}{N+m+1}$$

$$>\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{N+m+1}$$

从而

$$\frac{x_N}{N}\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{N+m}=+\infty$$

而这是不可能的，故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\right)\geqslant 1$$

例 6 设 $x_n>0$ $(n=1, 2, \cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$， 试证

（1） $$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}=0;$$

（2） $$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant 1}\left(\prod_{i=1}^{n} x_{i+k}\right)^{1/n}=0.$$

证 （1） 令 $y_n=\left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$，则

$$\ln y_n=\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}=-\infty$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=-\infty$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$。

(2) 由 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 得

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant 1} x_{n+k} = 0$$

令 $z_n = \sup_{k\geqslant 1} x_{n+k}$，则由（1）知

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right)^{1/n} = 0$$

即
$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \sup_{k\geqslant 1} x_{i+k}\right)^{1/n} = 0$$

由于对任意固定的 k_0，有

$$x_{i+k_0} \leqslant \sup_{k\geqslant 1} x_{i+k}$$

则
$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_{i+k}\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \sup_{k\geqslant 1} x_{i+k}\right)^{1/n}$$

故

$$\sup_{k\geqslant 1} \left(\prod_{i=1}^{n} x_{i+k}\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \sup_{k\geqslant 1} x_{i+k}\right)^{1/n}$$

由

$$\sup_{k\geqslant 1} \left(\prod_{i=1}^{n} x_{i+k}\right)^{1/n} \geqslant 0$$

及
$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \sup_{k\geqslant 1} x_{i+k}\right)^{1/n} = 0$$

得
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant 1} \left(\prod_{i=1}^{n} x_{i+k}\right)^{1/n} = 0$$

第二章　函数的极限与连续性

§2.1　函数的极限

基础理论

1.设$f(x)$在x_0点附近有定义，A是一个定数，如果对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A是$f(x)$在x_0点的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0)$$

设$f(x)$在x_0点的右（左）近旁有定义，A是一个定数，如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$0<x-x_0<\delta$（$0<x_0-x<\delta$）时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，称A是$f(x)$在x_0点的右（左）极限，记为

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A\ (\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A)$$

$$\text{或}\quad f(x_0+0)=A\quad (f(x_0-0)=A)$$

若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$X>0$，当$x>X$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$，称A为当$x\to+\infty$时$f(x)$的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to+\infty)$$

若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$X>0$，当$x<-X$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$，称A为当$x\to-\infty$时$f(x)$的极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to-\infty)$$

若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$X>0$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，称A是当$x\to\infty$时$f(x)$的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

如果对于任何 $G>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>G$，称 $f(x)$ 在 x_0 点趋于无穷，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \text{ 或 } f(x)\to\infty\ (x\to x_0)$$

类似地可以定义 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$（$A$有限或无穷），$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$（$A$有限或无穷），$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$，这里不一一列出。

2.**运算法则** 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$（$A$，$B$为有限值），则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$，

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$（$B\neq 0$）。

当 $x_0=\infty$ 或 $x_0=\pm\infty$ 及取单侧极限时，上述运算法则仍然成立。

3.**两个重要不等式** 对任何 x，有 $|\sin x|\leqslant|x|$；当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $|x|\leqslant|\tan x|$。

两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$。

4.$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件为对任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$（$n=1, 2, \cdots$），都有 $f(x_n)\to A$（$n\to\infty$）。

由于函数的极限与数列的极限具有许多类似的性质和定理，其证明或求极限的方法也有很多共同之处，故本节将不对函数的极限进行详细地讨论，而只对在第一章《数列的极限》

中所没有涉及到的一些方法结合部分题目加以考察。

利用函数极限的定义证明 $\lim_{x\to a} f(x)=A$，其方法与用定义证明数列的极限类似。例如，设 a，A 都为有限值，要证明 $\lim_{x\to a} f(x)=A$，即要证对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。一般情况下，要证 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，都是先将 x 限制在 a 点的某个 δ_1 邻域 $(a-\delta_1, a+\delta_1)$ 内，在此条件下将 $|f(x)-A|$ 适当放大为一个较简单的函数 $g(x)$，再由 $g(x)<\varepsilon$ 确定出正数 δ_2 来，放大的目的是使得由 $g(x)<\varepsilon$ 比由 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 确定 δ_2 更容易些。我们只要取 $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，必有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。

这里需要强调指出的是，当 $f(x)$ 有奇点 x_0（即当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 无界）时，要选取上述的 δ_1 需特别注意，必须使 $\delta_1<|x_0-a|$。否则，若使 $\delta_1\geqslant|x_0-a|$，则 $|f(x)-A|$ 在 $(a-\delta_1, a+\delta_1)$ 内将是无界的，因此不可能再将 $|f(x)-A|$ 放大。从而不可能使我们的证明过程简单化。

例 1 试证 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x+1}{10x^2-8x}=1$。

先将例 1 进行分析。如果对任给的 $\varepsilon>0$，直接由 $|(x+1)/(10x^2-8x)|<\varepsilon$ 确定出 δ 来是比较困难的，因此有必要将 $|(x+1)/(10x^2-8x)|$ 进行适当放大。由于 $(x+1)/(10x^2-8x)$ 有奇点 $x_1=0$ 及 $x_2=0.8$，而 x_1，x_2 与极限点 $a=1$ 的最小距离是 0.2，故对 x 的取值范围进行限制时，必须使 $\delta_1<0.2$，才能使 $(1-\delta_1, 1+\delta_1)$ 内不存在 $(x+1)/(10x^2-8x)$ 的奇点。比如取 $\delta_1=0.1$，因为

$$\left|\frac{x+1}{10x^2-8x}-1\right|=\left|\frac{(10x+1)(x-1)}{x(10x-8)}\right|$$

当 $|x-1|<\delta_1$ 时，$0.9<x<1.1$，所以

$$|(10x+1)(x-1)|<12|x-1|$$
$$|x(10x-8)|>0.9$$

故
$$\left|\frac{x+1}{10x^2-8x}-1\right|<\frac{12|x-1|}{0.9}<20|x-1|$$

如果取 $\delta_2=\frac{\varepsilon}{20}$，在 $|x-1|<\delta_1$ 的条件下，当 $0<|x-1|<\delta_2$ 时，则有

$$\left|\frac{x+1}{10x^2-8x}-1\right|<\varepsilon$$

下面对例1进行证明。

证 因为

$$\left|\frac{x+1}{10x^2-8x}-1\right|=\left|\frac{(10x+1)(x-1)}{x(10x-8)}\right|$$

当 $|x-1|<0.1$ 时

$$|(10x+1)(x-1)|<12|x-1|$$
$$|x(10x-8)|>0.9$$

所以

$$\left|\frac{x+1}{10x^2-8x}-1\right|<\frac{12|x-1|}{0.9}<20|x-1|$$

对任给的 $\varepsilon>0$，令 $\delta=\min(0.1,\ \varepsilon/20)$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时

$$\left|\frac{x+1}{10x^2-8x}-1\right|<20|x-1|<\varepsilon$$

从而
$$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{10x^2-8x}=1.$$

基础理论 4 建立了函数极限与数列极限之间的关系。这个关系在证明函数极限的理论中是非常重要的，尤其是证明函数 $f(x)$ 在 x_0 点的极限不存在时，只要选取符合条件的两个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 就一定不存在。

例 2 试证 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在。

证 令 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，$y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(n=1,2,\cdots)$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$，但

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi)=0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty} \sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在。

有时 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，但单侧极限是存在的，要证 $f(x)$ 的单侧极限的存在性，利用基础理论 4 显然是行不通的，对此我们有如下类似于基础理论 4 的结论例 3。

例 3 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 存在的充要条件是对任意严格单减趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在。

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 存在的充要条件是对任意严格单增趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在。

证　必要性

设 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$

由于 $\{x_n\}$ 单调减少趋于 x_0，所以对上述的 $\delta>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$0<x_n-x_0<\delta$，所以

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

充分性

首先证明对任意满足题设条件的两个数列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$，必有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$。

假设存在两个严格单减趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，及 $\{y_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$，令 $\{z_n\}$ 为由 $\{x_n\}$，$(y_n\}$ 两数列的所有的项按从大到小的顺序排列而成的数列，则 $\{z_n\}$ 单调减少趋于 x_0，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ 不存在，这与题设条件相矛盾。故对任意满足题设条件的两个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，必有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$。

设数列 $\{x_n\}$ 单调减少趋于 x_0，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，下面证明 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$。

假设 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq A$，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对于任意的 $\delta>0$，都存在 x'，满足 $0<x'-x_0<\delta$，但

$$|f(x')-A|\geqslant\varepsilon_0$$

特别地，取 $\delta_1=1$，则存在 x_1，满足 $0<x_1-x_0<\delta_1$，但 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$。取 $\delta_2=\frac{x_1-x_0}{2}$，则存在 x_2，满足 $0<x_2-x_0<\delta_2$，但 $|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$。一般地，取

$\delta_n=\frac{x_{n-1}-x_0}{2}$，则存在 x_n，满足 $0<x_n-x_0<\delta_n$，但 $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$。如此一直进行下去，我们可以得到一个单调减少趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$，这与题设条件矛盾，从而 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$。

同理可证：

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 存在的充要条件是对任意严格单增趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在。

需要说明，当 $x_0=\pm\infty$ 或 $A=\pm\infty$ 时，例 3 的结论仍然成立。由于证明方法与例 3 类似，因此这里证明从略。

由基础理论 4 建立起来的函数极限与数列极限间的关系知，若已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，$x_n\neq x_0$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$。由此不难证明如下结论：若 $f(x)$ 于 (a,b) 单调，存在数列 $\{x_n\}\subseteq(a,b)$，$x_n\to b$ $(n\to\infty)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ （A 有限或无穷），则 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=A$。事实上，由于 $x_n\in(a,b)$，$x_n\to b$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，又由于 $f(x)$ 于 (a,b) 单调知 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ 存在，因此结论成立。下面的例 4 我们将不利用"单调函数单侧极限存在"的结论，而直接证明 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$。

例 4 若 $f(x)$ 于 (a,b) 单调，存在 $\{x_n\}\subseteq(a,b)$，$x_n\to b$ $(n\to\infty)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，则 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=A$。

证 不妨设 $f(x)$ 单调上升，且 $\{x_n\}$ 单调上升（事实上，若 $\{x_n\}$ 不是单调上升的，总可以从 $\{x_n\}$ 中选出一子列

$\{x_{n_k}\}$，使 $\{x_{n_k}\}$ 单调上升趋于 b。因此只要用 $\{x_{n_k}\}$ 代替 $\{x_n\}$ 即可）。

（1） 当 A 有限时

因为 $\{x_n\}$ 单增，$f(x)$ 单增，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时

$$0\leqslant A-f(x_n)<\varepsilon$$

即
$$A-\varepsilon<f(x_n)\leqslant A$$

对于任意固定的 $x\in(x_N,\ b)$，由于 $\{x_n\}$ 单增趋于 b，必存在 n_0，使 $n_0>N$，$x<x_{n_0}$，再由 $f(x)$ 的单增性得

$$f(x_N)\leqslant f(x)\leqslant f(x_{n_0})$$

故由 $A-\varepsilon<f(x_n)\leqslant A$ 得

$$A-\varepsilon<f(x_N)\leqslant f(x)\leqslant f(x_{n_0})\leqslant A$$

所以
$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=A$。

（2） 当 $A=+\infty$ 时

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$，所以对任意给定的 $M>0$，存在正整数 N，使得 $f(x_N)>M$。由于 $f(x)$ 单增，所以当 $b>x>x_N$ 时，$\quad f(x)\geqslant f(x_N)>M$

故 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty$。

对于复合函数求极限有如下问题：设 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=u_0$，是否一定有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))=A$？答案是否定的。就是说有时可能 $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))$ 根本就不存在，或极限存在但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))\neq A$。

例如 设 $f(u)=\begin{cases}1 & \text{当 } u\neq 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } u=0 \text{ 时}\end{cases}$

$$u(x)=\begin{cases}0 & \text{当}x\text{为有理数时}\\ x & \text{当}x\text{为无理数时}\end{cases}$$

则
$$f(u(x))=\begin{cases}0 & \text{当}x\text{为有理数时}\\ 1 & \text{当}x\text{为无理数时}\end{cases}$$

显然 $\lim\limits_{u\to 0} f(u)=1$，$\lim\limits_{x\to 0} u(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to 0} f(u(x))$ 不存在

再例如　设　$f(u)=\begin{cases}1 & \text{当 } u\neq 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } u=0 \text{ 时}\end{cases}$　$u(x)\equiv 0$

则 $f(u(x))\equiv 0$。显然 $\lim\limits_{u\to 0} f(u)=1$. $\lim\limits_{x\to 0} u(x)=0$，

$$\text{但}\quad \lim_{x\to 0} f(u(x))=0\neq 1=\lim_{u\to 0} f(u)\text{。}$$

如果再加条件"当 $x\neq x_0$时，$u(x)\neq u_0$，"则上面的结论是成立的，下面例 5 将对此进行证明。

例 5　设 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=u_0$，其中当 $x\neq x_0$时，$u(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))=A$。

证　由于 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\eta>0$，使得当 $0<|u-u_0|<\eta$ 时

$$|f(u)-A|<\varepsilon$$

由于 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=u_0$ 及 $x\neq x_0$时 $u(x)\neq u_0$，所以对上述 $\eta>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$时

$$0<|u(x)-u_0|<\eta$$

故当 $0<|x-x_0|<\delta$时

$$|f(u(x))-A|<\varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))=A$。

顺便指出，当 A，u_0 为 $\pm\infty$ 时上述结论仍成立，这里证明从略。

在第一章里曾证明过“设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$，且存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\{y_n\}$ 严格单增，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=a$” 的结论。对于函数的极限也有类似结果。命题见下面例 6 。

例6 设 $f(x)$ 于 $(a,+\infty)$ 有定义，且在每一个有穷区间 (a,b) 内有界，$g(x)$ 于 $(a,+\infty)$ 严格单调上升，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$，如果

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=A$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$。

证 分三种情形证明。

(1) 当 A 有限时

因为 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=A$$

所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $G_1>0$，当 $x>G_1$ 时

$$\left|\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}-A\right|<\varepsilon$$

故 $$\left|\frac{f(x+2)-f(x+1)}{g(x+2)-g(x+1)}-A\right|<\varepsilon$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left|\frac{f(x+n)-f(x+n-1)}{g(x+n)-g(x+n-1)}-A\right|<\varepsilon$$

由§1.1 例4的引理得

$$\left|\frac{f(x+n)-f(x)}{g(x+n)-g(x)}-A\right|<\varepsilon \tag{2.1.1}$$

由于 $g(x)$ 单调上升，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$，及对任意的 $b>a$，$f(x)$ 于 (a, b) 有界，故 $g(x)$，$f(x)$ 于 $(G_1, G_1+1]$ 有界，所以存在 $G_2>G_1+1$，当 $x>G_2$ 时，对任意的 $x_0\in(G_1, G_1+1]$ 都有

$$\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|<\varepsilon \qquad \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|<\varepsilon$$

同时成立。

令 $x=x_0+n$，其中 $x_0\in(G_1, G_1+1]$，n 为正整数，则由式(2.1.1)得

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right|<\varepsilon$$

故

$$\left|\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}-A\right|<\varepsilon$$

由于

$$\left|\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}-A\right|$$

$$=\left|\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-A-\dfrac{f(x_0)}{g(x)}+\dfrac{g(x_0)}{g(x)}A}{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}\right|$$

$$\geqslant\frac{\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-A\right|-\left|\dfrac{f(x_0)}{g(x)}\right|-\left|\dfrac{g(x_0)}{g(x)}A\right|}{\left|1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}\right|}$$

所以

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right| \leqslant \left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| + \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}A\right| +$$

$$+\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right| \cdot \left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|$$

$$<\varepsilon+\varepsilon|A|+\varepsilon(1+\varepsilon)$$

$$=\varepsilon(2+\varepsilon+|A|)$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$。

（2） 当$A=+\infty$时

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=+\infty$

所以对任意给定的$M>0$，存在$G_1>0$，使得当$x>G_1$时

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}>4M$$

故

$$\frac{f(x+2)-f(x+1)}{g(x+2)-g(x+1)}>4M$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f(x+n)-f(x+n-1)}{g(x+n)-g(x+n-1)}>4M$$

所以 $$\frac{f(x+n)-f(x)}{g(x+n)-g(x)}>4M$$

因为 $f(x)$，$g(x)$ 于$(G_1, G_1+1]$有界，且$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$所以存在 $G_2>G_1+1$，当 $x>G_2$时，对任意的$x_0\in(G_1, G_1+1]$有

$$\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|<M \qquad \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2}$$

令 $x=x_0+n$，其中 $x_0\in(G_1, G_1+1]$，n 为正整数，则

$$\frac{f(x_0+n)-f(x_0)}{g(x_0+n)-g(x_0)}$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

$$=\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}>4M$$

所以

$$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(x_0)}{g(x)}+4M\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)$$

$$>4M\left(1-\frac{1}{2}\right)-M=M$$

故 $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

（3） 当 $A=-\infty$时

令 $f^*(x)=-f(x)$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^*(x+1)-f^*(x)}{g(x+1)-g(x)}=+\infty$$

由(2)得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^*(x)}{g(x)}=+\infty$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$$

要注意，命题例6中当 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=\infty$ 时，结论不一定成立。

例如 $f(x)=x(-1)^{[x]}$，$g(x)=x$，则

$$f(x+1)-f(x)=(2x+1)(-1)^{[x+1]}$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=\infty$$

但
$$\frac{f(x)}{g(x)}=(-1)^{[x]}$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在。

在例 6 的命题中令 $g(x)=x$，便得下面的命题：

设 $f(x)$ 定义于 $(a,+\infty)$，且在每一个有穷区间 $(a\quad b)$ 内有界，如果

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$$

如果在例 6 的命题中令 $g(x)=x^{n+1}$，便得下面的命题：

设 $f(x)$ 于 $(a,+\infty)$ 有定义，且在每一个有穷区间 (a,b) 内有界，如果

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=A$$

则
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{A}{n+1}$$

事实上，因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1}-1\right]}$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}$$

$$=A\cdot\frac{1}{n+1}$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}$$

$$=\frac{A}{n+1}$$

如果利用 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \ln f(x)=\ln a$ $(a>0)$ 的结论，上述命题又可得到如下命题：

如果 $f(x)\geqslant c>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=A$，则

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{1/x}=A$$

事实上，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(f(x))^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x+1)-\ln f(x)}{(x+1)-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln f(x+1)-\ln f(x)]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

$$=\ln A$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}f(x)^{1/x}=A$$

利用定义证明函数的极限，这是基本的也是十分重要的方法，许多极限的证明，都是通过已知条件及函数极限的定义而推出所需要的结论。

例7 设 $f(x)$ 于 $(0,\ 1)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0$，试证 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$。

证 因为
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0$$
所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x\in(0,\ \delta)$ 时
$$\left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$
即
$$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right|<\frac{\varepsilon x}{2} \qquad (2.1.2)$$

任取 $x_0\in(0,\ \delta)$，则由式(2.1.2)得

$$|f(x_0)|=\left|\left[f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]+\left[f\left(\frac{x_0}{2}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^2}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\cdots+\left[f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right]+f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right|$$

$$\leqslant\left|f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^2}\right)\right|$$

$$+\cdots+\left|f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right|$$

$$<\left(\frac{x_0}{2}+\frac{x_0}{2^2}+\cdots+\frac{x_0}{2^n}\right)\varepsilon+\left|f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right|$$

$$<x_0\varepsilon+\left|f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right| \qquad (2.1.3)$$

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，所以由式（2.1.3）令 $n\to\infty$ 得

$$|f(x_0)|\leqslant x_0\varepsilon$$

故
$$\left|\frac{f(x_0)}{x_0}\right|\leqslant\varepsilon$$

从而
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

练　习　题

1．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$；　　0

提示：利用 $\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<x^2$

（2） $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}\ (a>0)$；

提示：利用 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$； e^2

（4） $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln[(\cos(\pi 2^x)]}$；

提示：令 $t=\sin^2(\pi 2^x)$ 2

（5） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{ex^2-1}$； x

提示：利用 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$

（6） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}\cos^{2a}x-1}{x^2}$ （$a\neq 0$）。

2．试证 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得任何满足 $0<|x'-x_0|<\delta$ 及 $0<|x''-x_0|<\delta$ 的两点 x'，x''，都有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon。$$

3． 试证 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充要条件是对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，使对满足 $|x'|>M$，$|x''|>M$ 的一切 x'，x''，都有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon。$$

4． 设 $f(x)$ 在（0，$+\infty$）上有定义，且对任意的 $\lambda\in(0,1)$，都有 $f(n\lambda)\to 0$（$n\to+\infty$），问是否必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$？

§ 2.2 连续函数的定义及其基本性质

基础理论

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续。

若 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续。

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

若 $f(x)$ 在一个区间 I 上的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续。

2. 若 $f(x)$，$g(x)$ 都在 x_0 点连续，则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$

也在 x_0 连续，其中 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的情形，必须有 $g(x_0)\neq 0$。

3. 设 $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 严格增加（或减少），并且在每点连续，又设 $f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$（或 $f(a)=\beta$，$f(b)=\alpha$），则在区间 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 上，存在着 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$，它在这区间上也是单调增加（或减少）连续函数。

4. 若 $u=g(x)$ 在 x_0 连续，$g(x_0)=u_0$，而 $y=f(u)$ 在 u_0 连续，则复合函数 $y=f(g(x))$ 在 x_0 点连续。

5. 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$，必在 $[a, b]$ 上有界。

6. 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$，在 $[a, b]$ 上必有最大值和最小值。

7. 任何初等函数在它们的定义域上都是连续的。

根据定义，要证明函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续，只要

证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 即可。若 $f(x)$ 在 x_0 的任何邻域内都有无定义的点、或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，或虽然 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但极限值不等于 $f(x_0)$，则 $y=f(x)$ 在 x_0 点不连续。

例 1 试证

$$R(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{当 } x=\dfrac{m}{n} \quad (m,\ n \text{ 互质})\text{时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

在有理点间断，在无理点连续。

证 显然 $R(x)$ 是以 $T=1$ 为周期的周期函数，因此要证明上述结论成立，只要证明 $R(x)$ 在 $(0,\ 1]$ 成立即可。

显然当 $x\in(0,\ 1]$ 时，$0\leqslant R(x)\leqslant 1$，且对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，由于在区间 $(0,\ 1]$ 上使 $R(x)=1$ 的点只有 $x=1$，使 $R(x)=1/2$ 的点只有 $x=1/2$，…，使 $R(x)=1/N$ 的点只有 $1/N$，$2/N$，…，$(N-1)/N$ 中使分子，分母互质的有理数，所以使 $R(x)\geqslant\varepsilon$ 的点在 $(0,1]$ 只有有限个，设这有限个点为 x_1，x_2，…，x_{n_0}。

设 x_0 为 $(0,1]$ 上任意一点，若 $x_0\neq x_k$（$k=1,2,\cdots n_0$），令 $\delta=\min\{|x_1-x_0|,\ |x_2-x_0|,\ \cdots,\ |x_{n_0}-x_0|\}$
若 $x_0=x_k$（k 为某个正整数，且 $1\leqslant k\leqslant n_0$），令

$$\delta=\min\{|x_1-x_0|,\ |x_2-x_0|,\ \cdots,\ |x_{k-1}-x_0|,\ |x_{k+1}-x_0|,\ \cdots,\ |x_{n_0}-x_0|\}$$

则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$0\leqslant R(x)\leqslant\frac{1}{N+1}<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x \to x_0} R(x)=0$。从而当 x_0 为有理数时 $R(x)$在 x_0 间断；当 x_0 为无理数时，$R(x)$ 在 x_0 连续。

例 2 设 $f(x)$ 于 $(-\infty, +\infty)$ 有定义，且满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

及 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，试证

(1) $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数；

(2) $f(x)=ax$ 其中 a 为某个常数。

证 (1) 因为

$$f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)$$

所以
$$f(0)=0$$

由于 $f(x)$ 于 $x=0$ 连续，所以

$$\lim_{x \to 0} f(x)=f(0)=0$$

故对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$，有

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)=\lim_{\Delta x \to 0} [f(x)+f(\Delta x)]$$
$$=f(x)+f(0)=f(x)$$

从而 $f(x)$ 于 $(-\infty, +\infty)$ 连续。

(2) 因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，所以可归纳证明，对任意的正整数 n 有

$$f(nx)=nf(x)$$

所以
$$f(x)=f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right)=nf\left(\frac{x}{n}\right)$$

故
$$f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x)$$

从而

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=f\left(m \cdot \frac{x}{n}\right)=mf\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{m}{n}f(x)$$

其中m，n都为正整数。

由于　　$0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$

所以　　$f(-x)=-f(x)$

故

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-f\left(\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x)$$

因此对任意有理数r，有

$$f(rx)=rf(x)$$

设c为任意一个实数，则存在一有理数列$\{r_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=c$，由$f(x)$的连续性得

$$f(cx)=\lim_{n\to\infty}f(r_nx)=\lim_{n\to\infty}r_nf(x)=cf(x)$$

故对任意实数c都有$f(cx)=cf(x)$，所以

$$f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)$$

令$a=f(1)$，则得$f(x)=ax$。

利用函数的极限定义容易证明，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$。因此，如果$f(x)$在$x_0$连续，则$|f(x)|$在$x_0$也连续。再由连续函数的基本性质容易得到下面例3的结论。

例3　若$f(x)$及$g(x)$都是连续函数，则

$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$及$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$

也是连续函数。

证　因为

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$$

由于$f(x)$及$g(x)$连续，故$f(x)+g(x)$及$|f(x)-g(x)|$连续，从而$\varphi(x)$及$\psi(x)$连续。

有些命题可采用多种证法，如下面的例4可采用四种方法证明。

例4 设$f(x)$连续，试证对任何常数$c>0$，函数

$$g(x)=\begin{cases}-c & \text{当}f(x)<-c\text{时}\\ f(x) & \text{当}|f(x)|\leqslant c\text{时}\\ c & \text{当}f(x)>c\text{时}\end{cases}$$

也连续。

证法一 直接用连续函数的定义证明。

设x_0为任意一点，当$|f(x_0)|\neq c$时，显然$g(x)$于x_0连续。当$f(x_0)=c$时，由$g(x)$的定义知$g(x_0)=c$。由于$f(x)$于x_0连续，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>-c$且

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

所以 $$-c<g(x)\leqslant c$$

若$g(x)=c$，则

$$|g(x)-g(x_0)|=|c-c|=0<\varepsilon$$

若$|g(x)|<c$，则$g(x)=f(x)$，所以

$$|g(x)-g(x_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

因此当$|x-x_0|<\delta$时，总有

$$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$$

故$g(x)$于x_0连续。

同理可证 当$f(x_0)=-c$时，$g(x)$也于x_0连续。

证法二 利用“连续函数的复合函数仍是连续函数”的性质证明。

设

$$u(x)=\begin{cases}-c & \text{当 } x<-c \text{ 时}\\ x & \text{当 } |x|\leqslant c \text{ 时}\\ c & \text{当 } x>c \text{ 时}\end{cases}$$

则 $u(x)$ 显然处处连续，又因为 $f(x)$ 连续，所以复合函数 $u(f(x))$ 也是连续函数。而

$$u(f(x))=g(x)$$

故 $g(x)$ 连续。

证法三 利用例 3 的结论证明。

因为 $g(x)=\max\{\min(f(x),\ c),\ -c\}$

而 $f(x)$，c，$-c$ 都是连续函数，所以由例 3 知 $g(x)$ 是连续函数。

证法四 利用连续函数的基本性质证明。

因为

$$g(x)=\frac{1}{2}\{|f(x)+c|-|f(x)-c|\}$$

而 $f(x)$，c，$-c$ 都是连续函数，所以 $g(x)$ 连续。

例 5 设 $f(x)$ 在 $(c-\varDelta, c+\varDelta)$ $(\varDelta>0)$ 上有界，若定义

$$M(\delta)=\sup\{f(x);\ x\in(c-\delta,\ c+\delta)\}$$
$$m(\delta)=\inf\{f(x);\ x\in(c-\delta,\ c+\delta)\}$$
$$(0<\delta\leqslant\varDelta)$$

试证 (1) $\lim\limits_{\delta\to0^+}M(\delta)$ 及 $\lim\limits_{\delta\to0^+}m(\delta)$ 都存在（分别记为 M，m）；

(2) $f(x)$ 在 c 点连续的充要条件是 $M=m$。

证 （1）显然$M(\delta)$及$m(\delta)$都有界，且$M(\delta)$随δ的减少而减少，$m(\delta)$随δ的减少而增加，故$\lim\limits_{\delta\to 0^+}M(\delta)$及$\lim\limits_{\delta\to 0^+}m(\delta)$都存在。

（2）**必要性**

设$f(x)$在c点连续，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$（不妨设$\delta<\Delta$），则当$x\in(c-\delta,\ c+\delta)$时

$$|f(x)-f(c)|<\varepsilon$$

所以

$$f(c)-\varepsilon<f(x)<f(c)+\varepsilon$$

因此$M(\delta)\leqslant f(c)+\varepsilon$，$m(\delta)\geqslant f(c)-\varepsilon$，故

$$M\leqslant M(\delta)\leqslant f(c)+\varepsilon$$

$$m\geqslant m(\delta)\geqslant f(c)-\varepsilon$$

由ε的任意性得

$$M\leqslant m$$

另一方面，由M，m的定义知$M\geqslant m$，故

$$M=m$$

充分性

设$M=m$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得

$$M(\delta)-m(\delta)<\varepsilon$$

由于当$x\in(c-\delta,\ c+\delta)$时，$m(\delta)\leqslant f(x)\leqslant M(\delta)$，所以

$$|f(x)-f(c)|\leqslant M(\delta)-m(\delta)<\varepsilon$$

故$\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$，从而$f(x)$于$x=c$连续。

例6 定义$\omega_a(\delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|;\ x',\ x''\in(a-\delta,\ a+\delta)\}$（称$\omega_a(\delta)$为$f(x)$在$(a-\delta,\ a+\delta)$的振幅），试证$f(x)$在$x=a$点连续的充要条件是

$\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_a(\delta)=0$（记$\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_a(\delta)$为$\omega_a$，称为$f(x)$在$a$点的振幅）。

证 由$\omega_a(\delta)$的定义知，$\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_a(\delta)$存在。

必要性

设$f(x)$在$x=a$点连续，由柯西收敛原理知，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\eta>0$，当x'，$x''\in(a-\eta,\ a+\eta)$时

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

所以$\omega_a(\eta)\leqslant\varepsilon$，故当$\delta\leqslant\eta$时

$$\omega_a(\delta)\leqslant\omega_a(\eta)\leqslant\varepsilon$$

从而$\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_a(\delta)=0$。

充分性

设$\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_a(\delta)=0$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\eta>0$，使得$\omega_a(\eta)<\varepsilon$，即

$$\sup\{|f(x')-f(x'')|;\ x',\ x''\in(a-\eta,\ a+\eta)\}<\varepsilon$$

因此当x'，$x''\in(a-\eta,\ a+\eta)$时

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

故由柯西收敛原理知$f(x)$在$x=a$连续。

由于连续函数是由函数的极限来定义的，而函数的极限又与数列的极限存在着密切的联系，因此证明一个连续函数的命题，往往可以通过数列的极限来加以证明。下面用几个例子来说明其证明方法。

例7 设$f(x)$在$[a,\ b]$连续，$f(a)<f(b)$，又设对一切$x\in(a,\ b)$ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+t)-f(x-t)}{t}$存在，用$g(x)$表示这一极限，试证存在$c\in(a,b)$，使$g(c)$

$\geqslant 0$。

证 选取实数μ，使得$f(a)<\mu<f(b)$。由$f(x)$的连续性知，存在$\delta>0$，使得当$x\in[a, a+\delta]$时，$f(x)<\mu$；当$x\in[b-\delta, b]$时，$f(x)>\mu$。

令$E=\{x; x\in(a, b)$，且$f(x)<\mu\}$，$c=\sup\{E\}$，显然$a+\delta\leqslant c\leqslant b-\delta$，故$c\in(a, b)$，由$c$的定义及$f(x)$的连续性知，存在$x_n<c$，$x_n\in E(n=1, 2, \cdots)$，使$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$。

因此 $f(x_n)<\mu \quad (n=1, 2, \cdots)$

令 $t_n=c-x_n$，则$t_n>0(n=1, 2, \cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty} t_n=0$且

$$f(c+t_n)\geqslant\mu \qquad f(c-t_n)<\mu$$

所以

$$\frac{f(c+t_n)-f(c-t_n)}{t_n}>0$$

故

$$g(c)=\lim_{t\to} \frac{f(c+t)-f(c-t)}{t}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{f(c+t_n)-f(c-t_n)}{t_n}\geqslant 0$$

例 8 设$f(x)$于$[a, b]$(a, b有限或无穷)连续，且对任意的$x, y\in[a, b]$，满足$a\leqslant f(x)\leqslant b$及

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\alpha|x-y| \quad (0\leqslant\alpha<1)$$

试证存在唯一的$\overline{x}\in[a, b]$，使得$f(\overline{x})=\overline{x}$。

证 任取$x_0\in[a, b]$，令$x_n=f(x_{n-1})(n=1, 2, \cdots)$，则

$$|x_{n+1}-x_n| = |f(x_n)-f(x_{n-1})| \leqslant \alpha\ |x_n-x_{n-1}|$$

递推可得

$$|x_{n+1}-x_n| \leqslant \alpha^n\ |x_1-x_0|$$

所以对任意的正整数 p，有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &\leqslant |x_{n+p}-x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} \\ &\quad -x_{n+p-2}| +\cdots+ |x_{n+1}-x_n| \\ &\leqslant(\alpha^{n+p-1}+\alpha^{n+p-2}+\cdots+\alpha^n)\ |x_1-x_0| \\ &<\alpha^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\ |x_1-x_0| \\ &=\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\ |x_1-x_0|\end{aligned}$$

因为 $0\leqslant\alpha<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\ |x_1-x_0| = 0$，故对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\ |x_1-x_0| <\varepsilon$$

因此 $$|x_{n+p}-x_n| < \varepsilon$$

从而由柯西收敛原理知，存在 $\overline{x}\in[a,b]$，使

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\overline{x}$$

即 $$\lim_{n\to\infty} f(x_{n-1})=\overline{x}$$

由于 $f(x)$ 连续，所以

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{n-1})=f(\overline{x})$$

故 $f(\overline{x})=\overline{x}$。

下面证明 $\overline{x}$ 的唯一性。

假设又有 $\overline{y}\in[a,b]$，$\overline{y}\neq\overline{x}$，使 $f(\overline{y})=\overline{y}$，则

$$|f(\overline{y})-f(\overline{x})| = |\overline{y}-\overline{x}|$$

另一方面，由题设条件

$$|f(\overline{y})-f(\overline{x})|\leqslant a\ |\overline{y}-\overline{x}|\quad(0\leqslant a<1)$$

故
$$|\overline{y}-\overline{x}|\leqslant a\ |\overline{y}-\overline{x}|$$

这是不可能的，因此$\overline{x}$是唯一的。

利用例8的结果又可导出如下命题例9。

例9 设$f(x)$于$[a,b]$（a,b有限或无穷）连续，且对任意的$x\in[a,b]$，$a\leqslant f(x)\leqslant b$，令$f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$（$n=1,2,\cdots$）。若存在正整数$n_0$，使得对任意的$x$，$y\in[a,b]$，满足

$$|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|\leqslant a\ |x-y|\quad(0\leqslant a<1)$$

则存在唯一的$x_0\in[a,b]$，使得$f(x_0)=x_0$。

证 显然$f_{n_0}(x)$满足例8中的一切条件，故存在唯一的$x_0\in[a,b]$，使 $f_{n_0}(x_0)=x_0$。

由于

$$f_{n_0}(f(x_0))=f_{n_0+1}(x_0)=f(f_{n_0}(x_0))=f(x_0)$$

所以$f(x_0)$也是$f_{n_0}(x)=x$的一个解。由x_0的唯一性知

$$f(x_0)=x_0$$

故x_0是$f(x)=x$的一个解。

下面证明x_0是$f(x)=x$的唯一解。

假设又有$y_0\in[a,b]$，$y_0\neq x_0$，使得$f(y_0)=y_0$，则

$$f_{n_0}(y_0)=f_{n_0-1}(f(y_0))=f_{n_0-1}(y_0)$$

递推可得
$$f_{n_0}(y_0)=f(y_0)=y_0$$

故y_0又是$f_{n_0}(x)=x$的一个解，这与$f_{n_0}(x)=x$的解的唯一性相矛盾，说明x_0是使$f(x)=x$的唯一解。

例10 设$f(x)$于$[0,1]$连续，且$f(0)=f(1)=0$，试证存在$[0,1]$上图象向上凸的连续函数$g(x)$，使得$g(0)$

$=g(1)=0$，并且在$[0,1]$上满足$g(x)\geqslant f(x)$。

证 因为$f(x)$于$[0,1]$连续，所以有界，设$|f(x)|\leqslant M$。令$a_0=\frac{1}{2}$，因为$f(0)=f(1)=0$，$f(x)$于$[0,1]$连续，所以存在$\delta>0$，使得当$x\in[0,\delta)$或$x\in(1-\delta,1]$时，$|f(x)|<\frac{M}{2}$，故可选取a_1，使得$0<a_1\leqslant\frac{1}{3}a_0$，且当$x\in[0,a_1]$或$x\in[1-a_1,1]$时

$$|f(x)|\leqslant\frac{M}{2}$$

同理，可选取a_2，使得$0<a_2\leqslant\frac{1}{3}a_1$，且当$x\in[0,a_2]$，或$x\in[1-a_2,1]$时

$$|f(x)|\leqslant\frac{M}{2^2}$$

照这样的过程继续进行下去。一般地，选取a_n，使得$0<a_n\leqslant\frac{1}{3}a_{n-1}$，且当$x\in[0,a_n]$，或$x\in[1-a_n,1]$时

$$|f(x)|\leqslant\frac{M}{2^n}$$

这样我们得到一个单调下降趋向于零的数列$\{a_n\}$。令

$$g(x)=\begin{cases}M & x\in[a_1,1-a_1]\\ \dfrac{M}{2^n}\left(1+\dfrac{x-a_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}\right) & x\in[a_{n+1},a_n]\text{或}\\ & x\in[1-a_n,1-a_{n+1}]\\ & (n=1,2,\cdots)\\ 0 & x=0,1\end{cases}$$

则$g(x)$显然在$[0,1]$上连续，且满足$g(0)=g(1)=0$及$g(x)\geqslant f(x)$。

下面证明$g(x)$的图象向上凸。

要证明$g(x)$的图象向上凸，只要证明$g(x)$在(a_n,a_{n-1})上的斜率不大于在(a_{n+1},a_n)上的斜率即可，由于$g(x)$

在 (a_n, a_{n-1}) 上的斜率为 $\frac{M/2^{n-1}}{a_{n-1}-a_n}$，在 (a_{n+1}, a_n) 上的斜率为 $\frac{M/2^n}{a_n-a_{n+1}}$，而

$$\frac{\dfrac{M/2^{n-1}}{a_{n-1}-a_n}}{\dfrac{M/2^n}{a_n-a_{n+1}}}$$

$$=2\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n-1}-a_n}\leqslant 2\frac{a_n}{a_{n-1}-a_n}\leqslant\frac{2a_n}{2a_n}=1$$

故 $g(x)$ 的图象向上凸，从而 $g(x)$ 为所求的函数。

练 习 题

1. 设 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 单调有界，并且可取到 $f(a)$，$f(b)$ 之间的一切值，则 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 连续。

2. 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$（$A$ 有限），则 $f(x)$ 于 $[a, +\infty)$ 上有界。

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，若对数列 $x_n\in[a, b]$ $(n=1, 2, \cdots)$，存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，试证必有 $x_0\in[a, b]$ 使 $f(x_0)=A$。

4. 若两个连续函数在所有有理点上的值相等，则这两个函数相等。

5. 设 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 连续，如果对 $[a, b]$ 上任意两个有理数 r_1，r_2 $(r_1<r_2)$，有 $f(r_1)<f(r_2)$，则 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的单增函数。

6. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则函数

$$m(x)=\min_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} \text{ 和 } M(x)=\max_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在 $[a, b]$ 上连续。

7. 对任一给定的实数 a，求一函数，使它只在 a 处连续而在其余各点都不连续。

8. 用有限覆盖定理证明在有界闭区间上连续的函数必有最大值。

9. 设$f(x)$及$g(x)$为连续周期函数（$-\infty<x<+\infty$），且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$，试证$f(x)\equiv g(x)$。

10. 设$f(x)$在(a, b)内连续，且$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=A$（$A$有限），则$f(x)$在$(a, b)$内有最大值或最小值。

§2.3 介值定理

基础理论

如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则对于$f(a)$和$f(b)$之间的任意一个实数μ，在(a,b)内至少有一个ξ，使$f(\xi)=\mu$。

连续函数的介值定理在连续函数理论中占有十分重要的地位，许多有关连续函数的命题都是通过介值定理的应用而得以证明。为了使介值定理便于应用，有时需要构造适当的函数，使之满足介值定理的所有条件。有时由于证明命题的需要，对函数$f(x)$不是在整个定义区间$[a,b]$上应用介值定理，而是在$[a,b]$的一个子区间$[\alpha,\beta]$上应用该定理。下面举几例说明其用法。

例1 设$f(x)$于$[a,b]$连续，$a<c<d<b$，试证存在$\xi\in(c,d)$，使得

$$mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$$

其中m，n为正数。

证 分两种情形证明：

（1） 设$f(c)=f(d)$。取$\xi=c$或$\xi=d$，则

$$mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$$

（2） 设$f(c)\neq f(d)$，不妨设$f(c)<f(d)$，则

$$(m+n)f(c)<mf(c)+nf(d)<(m+n)f(d)$$

由于$f(x)$于$[c,d]$连续，所以由介值定理知，存在$\xi\in(c,d)$，使得

$$f(\xi)=\frac{mf(c)+nf(d)}{m+n}$$

故
$$mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$$

例2 试证方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}-\frac{a_2}{x-\lambda_2}-\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$$

（其中a_1，a_2，$a_3>0$，且$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$）在$(\lambda_1,\lambda_2)$与$(\lambda_2,\lambda_3)$内分别各有一个根存在。

证 显然$f(x)=\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$于$(\lambda_1,\lambda_2)$连续，由于

$$\lim_{x\to\lambda_1+0}f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to\lambda_2-0}f(x)=-\infty$$

因此必存在$\xi\in(\lambda_1,\lambda_2)$，使得$f(\xi)=0$。

假设又有$\eta\in(\lambda_1,\lambda_2)$，$\eta\neq\xi$，$\eta$也是

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$$

的根，则

$$\frac{a_1}{\xi-\lambda_1}+\frac{a_2}{\xi-\lambda_2}+\frac{a_3}{\xi-\lambda_3}$$

$$=\frac{a_1}{\eta-\lambda_1}+\frac{a_2}{\eta-\lambda_2}+\frac{a_3}{\eta-\lambda_3}$$

所以

$$a_1\left(\frac{1}{\xi-\lambda_1}-\frac{1}{\eta-\lambda_1}\right)+a_2\left(\frac{1}{\xi-\lambda_2}-\frac{1}{\eta-\lambda_2}\right)$$

$$+a_3\left(\frac{1}{\xi-\lambda_3}-\frac{1}{\eta-\lambda_3}\right)=0$$

即 $$\frac{a_1(\eta-\xi)}{(\xi-\lambda_1)(\eta-\lambda_1)}+\frac{a_2(\eta-\xi)}{(\xi-\lambda_2)(\eta-\lambda_2)}+\frac{a_3(\eta-\xi)}{(\xi-\lambda_3)(\eta-\lambda_3)}=0$$

故

$$\frac{a_1}{(\xi-\lambda_1)(\eta-\lambda_1)}+\frac{a_2}{(\xi-\lambda_2)(\eta-\lambda_2)}+\frac{a_3}{(\xi-\lambda_3)(\eta-\lambda_3)}=0 \tag{2.3.1}$$

另一方面，由于a_1，a_2，$a_3>0$，$(\xi-\lambda_i)(\eta-\lambda_i)>0$（$i=1$，2，3），所以

$$\frac{a_1}{(\xi-\lambda_1)(\eta-\lambda_1)}+\frac{a_2}{(\xi-\lambda_2)(\eta-\lambda_2)}+\frac{a_3}{(\xi-\lambda_3)(\eta-\lambda_3)}>0$$

此式与（2.3.1）矛盾，因此$f(x)=0$，在(λ_1, λ_2)内只有一个根。

同理可证$f(x)$在(λ_2, λ_3)内只有一个根。

例 3 设$f(x)$于$[0,1]$连续，且$f(0)=f(1)$，试证对每一个正整数n，存在$\xi_n\in[0,1]$，使

$$f(\xi_n)=f(\xi_n+\frac{1}{n})。$$

证 设$F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$，则$F(x)$于$[0,1-\frac{1}{n}]$连续。显然要证明命题结论，只要证明存在$\xi_n\in[0,1-\frac{1}{n}]$，使$F(\xi_n)=0$即可。

假设对一切$x\in[0,1-\frac{1}{n}]$，都有$F(x)\neq 0$，则$F(x)$

于$[0, 1-\frac{1}{n}]$恒大于零，或恒小于零。事实上，如果存在两点x_1，$x_2 \in [0, 1-\frac{1}{n}]$，使$F(x_1)$与$F(x_2)$异号，则由介值定理，必存在$\xi$位于$x_1$，$x_2$之间，使$F(\xi)=0$，这与假设矛盾，因此我们不妨设对一切$x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$，都有$F(x)>0$，则

$$F\left(\frac{k}{n}\right)>0\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

故
$$f\left(\frac{k}{n}\right)>f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

所以
$$f(0)>f\left(\frac{1}{n}\right)>f\left(\frac{2}{n}\right)>\cdots>f(1)$$

这与$f(0)=f(1)$矛盾，因此必有$\xi_n \in [0, 1-\frac{1}{n}]$，使$F(\xi_n)=0$。

例4　设$f(x)$于$[a, b]$连续，且$f(a)<f(b)$，如果$\{y_n\}$是严格单增数列，且$f(a)<y_n<f(b)$ $(n=1, 2, \cdots)$，令$x_n=\inf\{x;\ f(x)=y_n,\ x\in[a, b]\}$，试证$\{x_n\}$是严格单增数列。

证　由介值定理，显然$\{x;\ f(x)=y_n,\ x\in[a, b]\}$非空，又由于$\{x;\ f(x)=y_n,\ x\in[a, b]\}$是有界集，因此$x_n$存在。由$f(x)$的连续性得$x_n\in(a, b)$，且$f(x_n)=y_n$ $(n=1, 2, \cdots)$。

由于$f(a)<y_n<y_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$，所以

$$f(a)<f(x_n)<f(x_{n+1})$$

由介值定理知，存在$\xi_n\in(a, x_{n+1})$，使$f(\xi_n)=y_n$，再由x_n的定义知$x_n\leqslant\xi_n$，故

$$x_n\leqslant\xi_n<x_{n+1}$$

因此$\{x_n\}$是严格单增数列。

例 5 设$f(x)$于$(x_0,+\infty)$连续并有界，试证对任意实数T，可求得$x_n\to+\infty$（$n\to+\infty$），使

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0。$$

证 不妨设$T>0$，令$F(x)=f(x+T)-f(x)$，下面分三种情形证明：

（1）若当x充分大时，总有$F(x)\geqslant 0$，取$x_n=nT$（$n=1,2,\cdots$），则

$$x_n+T=(n+1)T=x_{n+1}$$

所以当n充分大时，$F(x_n)\geqslant 0$，即$f(x_{n+1})-f(x_n)\geqslant 0$，故$\{f(x_n)\}$单调上升，由于$\{f(x_n)\}$有界，所以$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在，从而

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=\lim_{n\to\infty}f(x_{n+1})-\lim_{n\to\infty}f(x_n)$$

$$=0$$

（2）若当x充分大时，总有$F(x)\leqslant 0$，则方法与（1）类似，也可证明命题结论成立。

（3）若对任意的正整数n，都存在x_n'，$x_n''>n$，使$F(x_n')\geqslant 0$，$F(x_n'')\leqslant 0$，由$f(x)$的连续性知，$F(x)$也连续，所以存在x_n位于x_n'，x_n''之间，使得 $F(x_n)=0$

即
$$f(x_n+T)-f(x_n)=0$$

显然$x_n\to+\infty$（$n\to\infty$），且

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0$$

例 6 试证在$(-\infty,+\infty)$上不存在连续函数$f(x)$，使得对任何实数c，方程$f(x)=c$都恰好有两个解。

证 假设存在$(-\infty,+\infty)$上的连续函数$f(x)$，使得

对任何实数 c，方程 $f(x)=c$ 都恰好有两个解。

取 $c=0$，则存在 x_1 和 x_2，使 $f(x_1)=f(x_2)=0$。不妨设 $x_1<x_2$，由于 $f(x)$ 于 $[x_1, x_2]$ 连续，故 $f(x)$ 于 (x_1, x_2) 恒大于零或恒小于零。事实上，若有 $a_1, a_2\in(x_1, x_2)$，使 $f(a_1)<0$，$f(a_2)>0$，则由介值定理，必存在位于 a_1, a_2 之间的点 ξ，使 $f(\xi)=0$，这样方程 $f(x)=0$ 至少有三个解，此与已知条件矛盾，因此不妨设当 $x\in(x_1, x_2)$ 时，$f(x)>0$。由于 $f(x)$ 于闭区间 $[x_1, x_2]$ 连续，故可达到最大值，设 $f(x_3)$ 为 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上的最大值，$x_3\in(x_1, x_2)$。

可以证明，当 $x<x_1$ 时，$f(x)<0$。事实上，假设存在 $x_0<x_1$，使 $f(x_0)>0$，取 $0<\mu<\min\{f(x_0), f(x_3)\}$，由介值定理，于 (x_0, x_1)，(x_1, x_3)，(x_3, x_2) 内各至少存在 $f(x)=c$（其中 $0<c<\mu$）的一个解。此与已知条件矛盾。因此当 $x<x_1$ 时，$f(x)<0$。

同理可证当 $x>x_2$ 时，$f(x)<0$，故当 $x\in(-\infty, +\infty)$ 时，总有 $f(x)\leqslant f(x_3)$。

取 $c>f(x_3)$，则 $f(x)=c$ 无解，此与已知条件矛盾，故满足给定条件的 $f(x)$ 是不存在的。

例 7 设多项式序列 $\{p_n(x)\}$ 定义为

$$p_1(x)=1+x \qquad p_2(x)=1+2x$$

且当 $m\geqslant 1$ 时
$$p_{2m+1}(x)=p_{2m}(x)+(m+1)x\,p_{2m-1}(x)$$
$$p_{2m+2}(x)=p_{2m+1}(x)+(m+1)x\,p_{2m}(x)$$

令 $x_n=\max\{x;\ p_n(x)=0\}$ $(n=1, 2, \cdots)$，试证 $\{x_n\}$ 为单增数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$。

证 用归纳法易证，当 $x\geqslant 0$ 时，$p_n(x)>0$ $(n=1, 2, \cdots)$，故若 $p_n(x)=0$ 有解，则其解必小于零。

下面归纳证明$\{x_n\}$单增。

显然$x_1=-1$，$x_2=-\frac{1}{2}$，故$x_1<x_2$。

假设$x_1<x_2<\cdots<x_{2m-1}<x_{2m}$，则$p_{2m-1}(x_{2m})>0$。事实上，若$p_{2m-1}(x_{2m})\leqslant 0$，由于$p_{2m-1}(0)>0$，故由介值定理，必存在$\xi$（$x_{2m}\leqslant\xi<0$），使$p_{2m-1}(\xi)=0$，因此$\xi\geqslant x_{2m}>x_{2m-1}$，这与$x_{2m-1}$的定义矛盾。因此

$$p_{2m-1}(x_{2m})>0$$

由x_{2m}的定义知，$p_{2m}(x_{2m})=0$，又$x_{2m}<0$，故

$$\begin{aligned}p_{2m+1}(x_{2m})&=p_{2m}(x_{2m})+(m+1)x_{2m}p_{2m-1}(x_{2m})\\&=(m+1)x_{2m}p_{2m-1}(x_{2m})<0\end{aligned}$$

由于$p_{2m+1}(0)>0$，所以存在$\xi\in(x_{2m},\ 0)$，使$p_{2m+1}(\xi)=0$，因此$x_{2m+1}\geqslant\xi>x_{2m}$，故

$$x_{2m+1}>x_{2m}$$

同理可证

$$x_{2m+2}>x_{2m+1}$$

从而证得$\{x_n\}$单增。

下面再证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

令$y_m=-\dfrac{1}{m+1}$，则

$$p_{2m+2}(y_m)=p_{2m+1}(y_m)-p_{2m}(y_m)=-p_{2m-1}(y_m)$$

故$p_{2m+2}(y_m)\leqslant 0$或$p_{2m-1}(y_m)\leqslant 0$至少有一个成立。如果$p_{2m+2}(y_m)\leqslant 0$成立，由$p_{2m+2}(0)>0$知，存在$\xi\in(y_m,\ 0)$，使$p_{2m+2}(\xi)=0$，所以$\xi\leqslant x_{2m+2}$，故

$$y_m\leqslant x_{2m+2}<x_{2m+3}$$

如果$p_{2m-1}(y_m)\leqslant 0$成立，同理可证

$$y_m\leqslant x_{2m-1}<x_{2m+2}<x_{2m+3}$$

因此

$$y_m\leqslant x_{2m+2}<0$$

$$y_m \leqslant x_{2m+3} < 0$$

同时成立。因为 $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = 0$，所以

$$\lim_{m\to\infty} x_{2m+2} = 0 \qquad \lim_{m\to\infty} x_{2m+3} = 0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

例 8 设 $\{f_n(x)\}$ 为在 $(0, +\infty)$ 上定义的函数列。令

$$f_1(x) = x, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x)\left[f_n(x) + \frac{1}{n}\right]$$

$(n = 1, 2, \cdots)$，试证存在唯一的一点 $a > 0$，使得对一切正整数 n，都有

$$0 < f_n(a) < f_{n+1}(a) < 1。$$

证 首先证明：若 $a > 0$，则 $0 < f_n(a) < f_{n+1}(a) < 1$ 对一切正整数 n 成立与 $1 - \frac{1}{n} < f_n(a) < 1$ 对一切正整数 n 成立是等价的。

事实上，设对一切正整数 n，都有

$$0 < f_n(a) < f_{n+1}(a) < 1$$

则
$$f_n(a) < f_n(a)\left[f_n(a) + \frac{1}{n}\right]$$

故
$$1 < f_n(a) + \frac{1}{n}$$

即
$$1 - \frac{1}{n} < f_n(a) \tag{2.3.2}$$

又
$$f_n(a) < f_{n+1}(a) < 1$$

所以由式 (2.3.2) 得

$$1 - \frac{1}{n} < f_n(a) < 1$$

反之，设对一切正整数 n，都有 $1 - \frac{1}{n} < f_n(a) < 1$，则

$$f_{n+1}(a)=f_n(a)\left[f_n(a)+\frac{1}{n}\right]$$

$$>f_n(a)\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right]=f_n(a)$$

又 $$0\leqslant 1-\frac{1}{n}<f_n(a)<1$$

所以 $$0<f_n(a)<f_{n+1}(a)<1$$

这就证明了 $0<f_n(a)<f_{n+1}(a)<1$ 与 $1-\frac{1}{n}<f_n(a)<1$ 的等价性，因此要证明例 8 结论成立，只要证明存在唯一的一点 $a>0$，使得 $1-\frac{1}{n}<f_n(a)<1$ 对一切正整数 n 成立即可，下面分部证明这一结论。

（1） 可归纳证明，对任意的正整数 n，都有 $f_n(0)=0$，且对一切 $x\geqslant 1$，都有 $f_n(x)\geqslant 1$，因此若存在满足题设条件的 a，必有 $a\in(0,1)$。

（2） 显然对每一个正整数 n，$f_n(x)$ 为一个正系数多项式，因此 $f_n(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上严格单增的连续函数。故由（1）及连续函数的介值定理知，存在 a_n，$b_n\in[0,1]$，使得

$$f_n(a_n)=1-\frac{1}{n}\qquad f_n(b_n)=1\qquad (2.3.3)$$

（3） 因为

$$f_{n+1}(a_n)=f_n(a_n)\left[f_n(a_n)+\frac{1}{n}\right]$$

$$=f_n(a_n)\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right]$$

$$=f_n(a_n)=1-\frac{1}{n}$$

$$f_{n+1}(a_{n+1})=1-\frac{1}{n+1}$$

所以 $$f_{n+1}(a_{n+1})>f_{n+1}(a_n)$$

由于 $f_n(x)$ 严格单增，因此 $a_{n+1}>a_n$，从而数列 $\{a_n\}$ 严格单增，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$。

因为

$$f_{n+1}(b_n)=f_n(b_n)\left[f_n(b_n)+\frac{1}{n}\right]=1+\frac{1}{n}>1=f_n(b_{n+1})$$

所以 $b_n>b_{n+1}$，故数列 $\{b_n\}$ 严格单减，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$。

（4） 因为 $f_n(a_n)\leqslant f_n(b_n)$，所以 $a_n\leqslant b_n$，故 $a\leqslant b$，由（3）可以看出，a，$b\in(0,1)$，由式（2.3.3）得

$$1-\frac{1}{n}=f_n(a_n)<f_n(a)\leqslant f_n(b)<f_n(b_n)=1$$

于是 a 点满足题设的一切条件。

（5） 证 a 的唯一性。假设又有 a' 满足题设条件，则

$$f_n(a_n)=1-\frac{1}{n}<f_n(a')<1=f_n(b_n)$$

故 $a'\in(a_n, b_n)$（$n=1, 2, \cdots$）。因此要证明 $a'=a$，只要证明 $b=a$ 即可。

因为对于任意的正整数 n，有

$$a_n<a\leqslant b<b_n$$

又有 $f_n(x)$ 的严格单增性及式（2.3.3）得

$$1-\frac{1}{n}=f(a_n)<f_n(a)\leqslant f_n(b)<f_n(b_n)=1$$

所以

$$f_n(b)-f_n(a)<1-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\longrightarrow 0$$

$$(n\to\infty)$$

故 $a=b$。说明 a 是唯一的。

练 习 题

1. 试证任何一个奇次实数的多项式至少有一个实根。

2. 设 $f(x)$ 于〔0,1〕连续，且对任意的 $x\in$〔0，1〕，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，试证存在 $x_0\in$〔0，1〕，使 $f(x_0)=x_0$。

3. 设 $f(x)$ 在〔a，b〕上连续，$a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n\leqslant b$，试证存在 $\xi\in$〔x_1，x_n〕，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$。

4. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 连续，若有数列 $x_n\to a$，$y_n\to a$（x_n，$y_n\in(a, b)$ $(n=1,2,\cdots)$），使极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=B$ 存在，则对 A、B 之间的任意实数 μ，必可找到数列 $Z_n\to a$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(Z_n)=\mu$。

5. 设 $f(x)$ 于〔a，b〕连续，且于 (a, b) 内达到最大(小)值，则存在 x_1，$x_2\in(a, b)$，使 $f(x_1)=f(x_2)$。

6. 设 $f(x)$ 于〔a，b〕连续，$a<c<d<b$，则存在 $\xi\in(c, d)$，使得 $f(c)+f(d)=2f(\xi)$。

§ 2.4 一致连续函数

基础理论

1. 设 $f(x)$ 于区间 I 上有定义，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x', x''\in I$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时，总有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

称 $f(x)$ 在 I 上是一致连续的。

2. 有限闭区间上的连续函数必是一致连续的。

首先建立几个 $f(x)$ 一致连续的充要条件，这对以后的证明是方便的。

例1 设

$\omega(\delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|;\ |x'-x''|<\delta, x', x''\in(a,b)\}$,
试证 $f(x)$ 于 (a,b) 一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega(\delta)=0$。

证 必要性

设 $f(x)$ 于 (a,b) 一致连续，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x', x''\in(a,b)$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

所以
$$\omega(\delta)\leqslant\varepsilon$$

故
$$\lim_{\delta\to 0+}\omega(\delta)=0$$

充分性

设 $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega(\delta)=0$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使 $\omega(\eta)<\varepsilon$，所以当 $x', x''\in(a,b)$，且 $|x'-x''|<\eta$ 时

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\omega(\eta)<\varepsilon$$

故 $f(x)$ 于 (a,b) 一致连续。

例2 试证 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续的充要条件是对 (a,b) 中的任何一个收敛数列 $\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$ 都是收敛数列。

证 必要性

因为 $f(x)$ 于 (a,b) 一致连续，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x', x''\in(a,b)$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \tag{2.4.1}$$

设 $\{x_n\}$ 是 (a,b) 中任一收敛数列，则对上述 $\delta>0$，存在正整数 N，当 $m,n>N$ 时

$$|x_m-x_n|<\delta$$

故由式(2.4.1)得

$$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$$

因此 $\{f(x_n)\}$ 是收敛数列。

充分性

假设 $f(x)$ 于 (a,b) 不一致连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意的 $\delta>0$，总存在 $x', x''\in(a,b)$，使 $|x'-x''|<\delta$，但

$$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$$

令 $\delta=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，则存在 x_n'，$x_n''\in(a,b)$，使 $|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$，但

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0 \qquad (2.4.2)$$

由于 $\{x_n'\}$ 有界，故存在收敛子列 $\{x'_{n_k}\}$，由于 $|x'_{n_k}-x''_{n_k}|<\frac{1}{n_k}$，所以 $\{x''_{n_k}\}$ 也收敛，且满足 $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty} x''_{n_k}$，因此数列 x_{n_1}'，x_{n_1}''，x_{n_2}'，x_{n_2}''，$\cdots$，x_{n_k}'，$x_{n_k}''\cdots$，是(a,b)中一收敛数列。故由已知条件知，数列$f(x'_{n_1})$，$f(x''_{n_1})$，$f(x'_{n_2})$，$f(x''_{n_2})$，$\cdots$，$f(x_{n_k}')$，$f(x_{n_k}'')$，$\cdots$也是收敛数列。因此当k充分大时

$$|(f'_{n_k})-f(x''_{n_k})|<\varepsilon_0$$

此式与式(2.4.2)矛盾，故 $f(x)$ 于$(a.b)$一致连续。

例 3 设 $f(x)$ 在有限开区间$(a.b)$连续，试证$f(x)$在(a,b)一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ 都存在且有限。

证 必要性

因为 $f(x)$ 于 (a,b) 一致连续，所以对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 x'，$x''\in(a,b)$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

由于当 $x', x''\in(a,a+\delta)$ 时，$|x'-x''|<\delta$，所以

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

故由柯西收敛原理知 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 存在且有限。

同理可证 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 存在且有限。

充分性

因为 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 存在且有限，所以可设 $f(a)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 及 $f(b)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$，则 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 连续，所以 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 一致连续，从而 $f(x)$ 于 (a,b) 一致连续。

需要指出，上述命题的充分性对无穷区间也成立，但必要性未必成立。

下面证明当 (a,b) 为 $(-\infty, +\infty)$ 时上述命题充分性成立。

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限，所以对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $G_1>0$，当 $x', x''>G_1$ 时

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \tag{2.4.3}$$

同样由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在且有限，所以对上述 $\varepsilon>0$，存在 $G_2>0$，当 x'，$x''<-G_2$ 时

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \tag{2.4.4}$$

由于 $f(x)$ 于 $[-G_2-1, G_1+1]$ 连续，故一致连续，从而对上述 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$（不妨设 $\delta<1$），当 x'，$x''\in[-G_2-1, G_1+1]$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \tag{2.4.5}$$

由式 (2.4.3)，(2.4.4)，(2.4.5) 可以看出，当 $x', x''\in(-\infty, +\infty)$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时，总有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

故 $f(x)$ 于 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续。

可以证明当 (a,b) 为 $(-\infty,a)$ 或 $(a,+\infty)$ 时命题的充分性也成立，这里证明从略。

下面举例说明当 (a,b) 为无穷区间时，上述命题的必要性不成立。

例如$f(x)=\sin x$于$(0,+\infty)$一致连续，但$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$不存在。

有了前面建立起来的函数在区间上一致连续的充要条件，许多关于一致连续的命题的证明就可以不必从一致连续的定义出发，而直接利用上述结果加以论证，特别是例3的结论，在证明关于一致连续的命题时经常被采用，下面举几例说明上述充要条件的用法。

例4 设$f(x)$及$g(x)$在有限开区间(a,b)一致连续，试证$f(x)\cdot g(x)$在(a,b)也一致连续。

证 因为$f(x)$及$g(x)$在(a,b)一致连续，所以$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$及$\lim\limits_{x\to a+0}g(x)$都有在目有限，故由极限的性质知$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)\cdot g(x)$也有在且有限。同理可证：$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)\cdot g(x)$存在且有限。故$f(x)\cdot g(x)$于$(a,b)$一致连续。

上述命题的证明反复用到例3的充分性和必要性。由于例3的必要性在(a,b)是无穷区间时不一定成立，因此例4的命题当(a,b)是无穷区间时也未必成立，例如$f(x)=g(x)=x$，则$f(x)$及$g(x)$在$(0,+\infty)$一致连续，但$f(x)\cdot g(x)=x^2$在$(0,+\infty)$上不一致连续。

例5 设$f(x)$在有限开区间(a,b)连续，$f^2(x)$在(a,b)一致连续，试证$f(x)$在(a,b)也一致连续。

证 因为$f^2(x)$在(a,b)一致连续，所以$\lim\limits_{x\to a+0}f^2(x)$存在且有限。设$\lim\limits_{x\to a+0}f^2(x)=A$，则当$A=0$时，由

$\lim\limits_{x\to a+0}f^2(x)=0$，得 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

当$A>0$时，则$\lim\limits_{x\to a+0}|f(x)|=\sqrt{A}>0$，所以存在$\delta>0$，当$x\in$

$(a,a+\delta)$时

$$|f(x)|>\frac{\sqrt{A}}{2} \tag{2.4.6}$$

故 $f(x)$ 于 $(a,a+\delta)$ 不变号。事实上，假设 $f(x)$ 于$(a,a+\delta)$ 变号，则存在 x_1，$x_2\in(a,a+\delta)$，使 $f(x_1)<0$，$f(x_2)>0$。由于 $f(x)$ 于 $(a,a+\delta)$ 连续，故由介值定理知，于 x_1，x_2 之间存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$。这与式(2.4.6) 矛盾。因此 $f(x)$ 于 $(a,a+\delta)$ 不变号。不妨设当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，$f(x)>0$。所以

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a+0} |f(x)|=\sqrt{A}$$

故 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 存在且有限。

同理可证 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$存在且有限。

故由例 3 的充分性知，$f(x)$ 于 (a,b) 一致连续。

需要指出的是，并不是一切关于一致连续的命题都可以用前面所述的充要条件来证明的，利用一致连续的定义证明命题，这也是十分重要的方法。

例 6 设 $f(x)$ 于$[0,+\infty)$ 一致连续，且对一切 $x\in[0,+\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n)=0$（$n$ 为正整数），试证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

证 因为 $f(x)$ 于 $[0,+\infty)$ 一致连续，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当 $x',x''\geqslant0$，且 $|x'-x''|<\delta$时

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

取充分大的正整数 k，使 $\frac{1}{k}<\delta$，令 $x_i=\frac{i}{k}(0\leqslant i\leqslant k)$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_i+n)=0$ $(i=0,1,\cdots,k)$，所以存在正整数 N_i，当$n\geqslant N_i$ 时

$$|f(x_i+n)|<\varepsilon$$

令 $N=\max(N_0,N_1,\cdots,N_k)$，则当 $n\geqslant N$ 时，对一切 $i\,(0\leqslant i\leqslant k)$ 都有

$$|f(x_i+n)|<\varepsilon$$

由于当 $x>N+1$ 时，必有 $x_0\in[0,1]$ 及 $n\geqslant N$，使

$$x=x_0+n$$

显然存在某个 $i\,(1\leqslant i\leqslant k)$，使 $x_{i-1}\leqslant x_0\leqslant x_i$，所以

$$|x-(x_i+n)|=|x_0-x_i|\leqslant\frac{1}{k}<\delta$$

故

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(x_i+n)|+|f(x_i+n)|$$
$$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

练　习　题

1. 试证 (a,b) 上的一致连续函数必有界。

2. 若 $f(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上的任一有限闭区间上连续，则它在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任一有限开区间上也一致连续。

3. 已知 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 连续，试证 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续。

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上都一致连续，试证 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上也一致连续。

5. 设 $f(x)$ 在 $[a+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限，试证 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上一致连续。

6. 设 $f(u)$ 于区间 I_0 一致连续，$\varphi(x)$ 于区间 I 一致连续，且当 $x\in I$ 时，$\varphi(x)\in I_0$，试证复合函数 $f(\varphi(x))$ 于 I 一致连续。

第三章　函数的导数

§3.1　导数的定义及其基本性质

基础理论

1．设 $f(x)$ 在 x_0 点处的一个邻域中有定义，如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在且有限，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，称其极限值为 $f(x)$ 在 x_0 的导数，记为 $f'(x_0)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$

如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x_0}$ 存在且有限，称其极限值为 $f(x)$ 在 x_0 点的右导数，记为 $f'_+(x_0)$。

如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在且有限，称其极限值为 $f(x)$ 在 x_0 点的左导数，记为 $f'_-(x_0)$。

2．若 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点可导，称 $f(x)$ 在 (a,b) 是可导的。

若 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，$f_+'(a)$ 及 $f_-'(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 可导。

3．若 $f(x)$ 于 x_0 点可导，则 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

4．若 $u(x)$ 及 $v(x)$ 都可导，则

(1)　$[cu(x)]'=cu'(x)$（c 为常数）；

(2)　$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

（3） $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$；

（4） $$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$(v(x) \neq 0)$

5．若 $y=f(u)$ 在点 u 可导，$u=g(x)$ 在点 x 可导，则复合函数 $y=f(g(x))$ 在点 x 可导，且

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)\left(\text{或} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\right)$$

6．若 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 x 点又有导数，称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的二阶导数，记为 $f''(x)$。类似称 $f''(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的三阶导数，记为 $f'''(x)$ 等等。

由基础理论3易知，要判断一个函数在 x_0 点是否可导，首先看这个函数在 x_0 点是否连续，若不连续，则肯定不可导。若函数在 x_0 点连续，可再用导数定义或其它方法证明是否可导。这里需强调指出：若 $f(x)$ 在 x_0 不连续，则 $f(x)$ 在 x_0 点一定不可导；但若 $f(x)$ 在 x_0 点连续，$f(x)$ 在 x_0 点也未必可导，就是说，函数的连续性是可导的必要条件，但不是充分条件。

例1 试证

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & x = \dfrac{m}{n}\ (m, n \text{ 互质}) \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

处处不可导。

证 由于 $R(x)$ 是以1为周期的函数，故只证明 $R(x)$ 于 $(0, 1)$ 处处不可导即可。

因为 $R(x)$ 于有理点不连续（见§2.2例1），所以 $R(x)$ 在有理点不可导。

设 x_0 为 (0.1) 中任一无理点，x_0 用十进制小数表示为 $x_0=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，令 $x_n=0.a_1a_2\cdots a_n$ $(n=(1,2,\cdots)$，则 x_n为有理数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$。

选取 $\{y_n\}$ 为 (0.1) 中的无理数列，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=x_0$，因为

$$\frac{R(y_n)-R(x_0)}{y_n-x_0}=0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(y_n)-R(x_0)}{y_n-x_0}=0$$

另一方面，因为

$$|x_n-x_0|=0.00\cdots0a_{n+1}a_{n+2}\cdots<\frac{1}{10^n}$$

$$|R(x_n)-R(x_0)|=R(x_n)=R\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n}\right)\geqslant\frac{1}{10^n}$$

所以

$$\left|\frac{R(x_n)-R(x_0)}{x_n-x_0}\right|>1$$

从而不可能有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(x_n)-R(x_0)}{x_n-x_0}=0$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R(x)-R(x_0)}{x-x_0}$ 不存在，因此 $R(x)$ 在 x_0 不可导。

例2 设 $f(x)$ 为定义于 $(-1,1)$内的函数，且 $f'(0)$ 存在，$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 为两个数列，满足

(1) $-1<a_n<0<b_n<1$ $(n=1,2,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$

试证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(0)。$$

证 因为

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$$

$$=\frac{f(b_n)-f(0)+f(0)-f(a_n)}{b_n-a_n}$$

$$=\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}\cdot\frac{b_n}{b_n-a_n}$$

$$-\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}\cdot\frac{a_n}{b_n-a_n}$$

$$=\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}\left(1+\frac{a_n}{b_n-a_n}\right)$$

$$-\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}\cdot\frac{a_n}{b_n-a_n}$$

$$=\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}+\left[\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}\right.$$

$$\left.-\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}\right]\cdot\frac{a_n}{b_n-a_n}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}=f'(0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}=f'(0)$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}-\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}\right]$$

$$=f'(0)-f'(0)=0$$

又

$$\left|\frac{a_n}{b_n-a_n}\right|<1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}-\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}\right]\cdot\frac{a_n}{b_n-a_n}=0$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}=f'(0)$$

注意：如果将例 2 中的题设条件“$-1<a_n<0<b_n<1$”改为“$-1<a_n<b_n<1$”则命题结论不一定成立。

例如

设

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

则$f'(0)=0$，但若取 $a_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，$b_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，则$-1<a_n<b_n<1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，

但

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2n\pi}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=-\frac{2}{\pi}\neq f'(0)$$

由导数的定义可以看出，若 $f(x)$ 在 x 点可导，则 $f(x)$ 的左、右导数都存在，且 $f'_+(x)=f'_-(x)$。反之，若 $f(x)$ 在 x 点的左、右导数都存在，且 $f'_+(x)=f'_-(x)$，则 $f(x)$ 在 x 点可导，并且 $f'(x)=f'_+(x)=f'_-(x)$，这一结论给我们提供了求函数在 x_0 点的导数的一种方法：如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不易直接求出，但 $f_+'(x_0)$ 及 $f'_-(x_0)$ 比较容易求得，这样 $f'(x_0)$ 就可以通过 $f'_+(x_0)$ 及 $f'_-(x_0)$ 而得到，或者已知 $f'(x_0)$ 存在，并且已证得 $f_+'(x_0)\geqslant a$（或 $\leqslant a$）及 $f'_-(x_0)\leqslant a$（或 $\geqslant a$），则我们立刻可以断定 $f'(x_0)=a$。

例3 设 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点可导，且 $f(a)=0$，试证 $f'(a)=0$。

证 因为 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 可导，所以极限

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|}{x-a}$$

存在，故
$$\lim_{x\to a-0}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+0}\frac{|f(x)|}{x-a}$$

由于当 $x>a$ 时 $\dfrac{|f(x)|}{x-a}\geqslant 0$，当 $x<a$ 时 $\dfrac{|f(x)|}{x-a}\leqslant 0$，

所以
$$\lim_{x\to a-0}\frac{|f(x)|}{x-a}\leqslant 0$$

$$\lim_{x\to a+0}\frac{|f(x)|}{x-a}\geqslant 0$$

故
$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|}{x-a}=0$$

从而
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=0$$

因为 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}$

所以 $f'(a)=0$。

关于求 $y=f(x)$ 在某点的 n 阶导数的方法，一般可采用先观察出 $f^{(n)}(x)$ 的结果，然后再用数学归纳法证明其结果正确，例如$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$可用归纳法证明：对任何正整数$n$，都有 $f^{(n)}(0)=0$。但有些函数其 n 阶导数不易观察出其结果，因此就不能采用上述方法求得$f^{(n)}(x)$，此时可根据函数本身的特点找出一个递推公式来，利用递推公式可以求得函数的任意阶导数。

例 4 求 $y=\arctan x$ 在 $x=0$ 点的各阶导数。

解 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad y'(0)=1$

$$y''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad y''(0)=0$$

由于 $(1+x^2)y'=1$，所以对该方程两边对 x 求 n 阶导数得

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+n\cdot 2xy^{(n)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2y^{(n-1)}=0 \quad (3.1.1)$$

将 $x=0$ 代入式(3.1.1)得

$$y^{(n+1)}(0)+n(n-1)y^{(n-1)}(0)=0$$

故得递推公式 $\quad y^{(n+2)}_{(0)}=-n(n+1)y^{(n)}(0)$

由于 $y''(0)=0$，所以 $y^{(2k)}(0)=0$ $(k=1,2,\cdots)$。因为 $y'(0)=1$，所以 $y^{(2k+1)}_{(0)}=(-1)^k(2k)!$ $(k=1,2,\cdots)$。故

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n\text{ 为偶数}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

例 5　求 $y=\arcsin x$ 在 $x=0$ 点的各阶导数。

解　$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　　　$y'(0)=1$

$$y''=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}=\frac{x}{1-x^2}\cdot y' \qquad y''(0)=0$$

所以

$$(1-x^2)y''=xy' \tag{3.1.2}$$

将式(3.1.2)两边对 x 求 n 阶导数得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}+n(-2x)y^{(n+1)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)y^{(n)}=xy^{(n+1)}+ny^{(n)} \tag{3.1.3}$$

将 $x=0$ 代入式(3.1.3)得

$$y^{(n+2)}(0)-n(n-1)y^{(n)}(0)=ny^{(n)}(0)$$

故得递推公式

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$$

因为 $y''(0)=0$，所以 $y^{(2k)}(0)=0\ (k=1,2,\cdots)$，又因为 $y'(0)=1$，所以 $y^{(2k+1)}(0)=[(2k-1)!!]^2\ (k=1,2,\cdots)$。故

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n\text{ 为偶数}\\ [(n-2)!!]^2 & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

练　习　题

1．设

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\text{ 为有理数}\\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

试证 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 点可导。

2．设

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant x_0 \\ ax+b & x>x_0 \end{cases}$$

应如何选取 a 和 b 的值，才能使 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导？

3. 用导数的定义证明偶函数的导函数是奇函数，奇函数的导函数是偶函数。

4. 若对任何有理数列 $r_n\to 0\ (n\to\infty)$，极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+r_n)-f(x)}{r_n}$$

存在且有限，$f(x)$在x点是否可导？

5. 设

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

其中$g(0)=g'(0)=0$，求$f'(0)$.

6. 设
$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

试证对任何正整数 n，都有 $f^{(n)}(0)=0$。

7. 设

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{f'(a)}\left[1+\frac{f(x)-f(a)}{f'(a)^2}\left(f'(a)-\frac{1}{2}f''(a)\right)\right]$$

求 $\varphi'(a)$ 及 $\varphi''(a)$。

§3.2 微分基本定理

基础理论

1. 费马(Fermat)定理

若 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$（或 $f(x)\geqslant f(x_0)$），且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，则 $f'(x_0)=0$。

2. 罗尔(Rolle)定理

若 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 连续，于 (a,b) 可导，且 $f(a)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$。

3. 拉格朗日(Lagrange)定理

若 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 连续，于 (a,b) 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

4. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内满足 $f'(x)\equiv 0$，则在 (a,b) 内 $f(x)$ 为一常数。

5. 柯西定理

若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，并且 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

6. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$（a,b 有限或无穷）连续，在 (a,b) 可导，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调上升（或下降）的充要条件是：在 (a,b) 内 $f'(x)\geqslant 0$（或 $f'(x)\leqslant 0$）。

微分基本定理是导数理论中的重要组成部分，许多命题的结论都是通过微分基本定理的应用得以证明。

首先由费马定理推出一个十分有用的定理，即下面的**达布(G · Darboue)定理**。

例 1　达布定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则

（1） 若 $f'_+(a)<0$，$f'_-(b)>0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=0;$$

（2） 若$f'_+(a)<c<f'_-(b)$，则存在$\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=c。$$

证 （1） 由于$f(x)$于$[a,b]$可导，故连续，所以存在$\xi\in[a,b]$，使$f(\xi)$为$f(x)$的最小值。

因为$f'_+(a)<0$，$f'_-(b)>0$，所以存在$\delta>0$，当$x\in(a,a+\delta)$时，$f(x)<f(a)$；当$x\in(b-\delta,\ b)$时，$f(x)<f(b)$。因此$\xi\neq a,b$，故$\xi\in(a,b)$。由费马定理知

$$f'(\xi)=0$$

（2） 令$F(x)=f(x)-cx$，则

$$F'_+(a)=f'_+(a)-c<0$$

$$F'_-(a)=f'_-(a)-c>0$$

故由（1）知，存在$\xi\in(a,b)$，使$F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=c$$

不难看出，当$f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$或

$f'_+(a)>c>f'_-(b)$时，上述结论仍然成立。其证明方法与上述证明类似，这里从略。

根据达布定理，如果$f(x)$于$[a,b]$可导，且$f'_+(a)\neq f'_-(b)$，则$f'(x)$于(a,b)可取到$f'_+(a)$与$f'_-(b)$之间的一切值，从形式上看，这与连续函数的介值定理很相似，但绝不能认为$f'(x)$就一定是连续函数。例如

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

则

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

显然$f'(x)$在$x=0$不连续。

由达布定理与连续函数的介值定理的相似性可知，有关连续函数应用介值定理的证明方法完全可以类似地用到达布定理上来。下面举几例说明。

例 2　设 $f(x)$ 于 (a,b) 可微，设 $m=\inf\limits_{a<x<b}\{f'(x)\}$，$M=\sup\limits_{a<x<b}\{f'(x)\}$ ($m\neq M$，m,M 有限或无穷)。则对于满足 $m<\mu<M$ 的实数 μ，于 (a,b) 中存在 ξ，使 $f'(\xi)=\mu$。

证　因为

$$m=\inf_{a<x<b}\{f'(x)\} \qquad M=\sup_{a<x<b}\{f'(x)\}$$

$$m<\mu<M$$

所以存在 x_1，$x_2\in(a,b)$，使得　$f'(x_1)<\mu<f'(x_2)$

由达布定理知，存在 ξ 位于 x_1，x_2 之间，使　$f'(\xi)=\mu$。

例 3　若 $f(x)$ 于 (a,b) 可导，且 $f'(x_0)>0$ ($x_0\in(a,b)$)，则于 x_0 的任意邻域 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 内有点 $x_1\neq x_0$，使 $f'(x_1)>0$。

证　于 $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ 内任取一点 x^*，且 $x^*\neq x_0$，若 $f'(x^*)>0$，则命题结论成立，若 $f'(x^*)\leqslant 0$，令 $\mu=\frac{1}{2}f'(x_0)$，

则
$$f'(x^*)<\mu<f'(x_0)$$

由达布定理，存在 x_1 位于 x_0，x^* 之间，使得

$$f'(x_1)=\mu>0$$

例 4　设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 可导，且 $f'(a)=f'(b)$，试证存在 $\xi\in\left[a,\ \frac{a+b}{2}\right]$，使 $f'(\xi)=f'\left(\xi+\frac{b-a}{2}\right)$。

证 令$F(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)-f(x)$，则$F(x)$于$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$可导，且

$$F'(x)=f'\left(x+\frac{b-a}{2}\right)-f'(x)$$

故

$$F'(a)=f'\left(a+\frac{b-a}{2}\right)-f'(a) \qquad (3.2.1)$$

$$F'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'(b)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

因为$f'(a)=f'(b)$，所以

$$F'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'(a)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=f'(a)-f'\left(a+\frac{b-a}{2}\right) \qquad (3.2.2)$$

由式(3.2.1)及(3.2.2)得

$$F'\left(\frac{a+b}{2}\right)=-F'(a)$$

若$F'(a)=0$，取$\xi=a$，则由式(3.2.1)得

$$F'(\xi)=0=f'\left(\xi+\frac{b-a}{2}\right)-f'(\xi)$$

故 $$f'(\xi)=f'\left(\xi+\frac{b-a}{2}\right)$$

若$F'(a)\neq 0$，则$F'(a)$与$F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$异号，所以由达布定理知，存在$\xi\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$，使得

$$F'(\xi)=0$$

从而 $$f'(\xi)=f'(\xi+\frac{b-a}{2})$$

罗尔定理在微分理论中也是经常被应用的理论。应用罗尔定理的基本方法在于找到两点 $x_1, x_2 \in I$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，然后再于以 x_1，x_2 为端点的闭区间上应用罗尔定理，从而达到证明命题的目的。

例 5 设 $f(x)$ 在区间 (a,b)（a,b有限或无穷）内可导，且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$。试证存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

证法一 （1）若 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒为一个常数，则结论显然成立。

（2） 若 $f(x)$ 在 (a,b) 不恒为常数，设 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$，则必定存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)\neq A$，不妨设 $f(x_0)<A$。

由于 $f(x)$ 于 (a,b) 可导，故连续，从而由介值定理知，对于 $\mu\in(f(x_0), A)$，必存在 $x_1\in(a,x_0)$，$x_2\in(x_0,b)$，使 $$f(x_1)=\mu=f(x_2)$$
故由罗尔定理知，存在 $\xi\in(x_1, x_2)$，使 $f'(\xi)=0$。

证法二 用费马定理证明：

若 $f(x)\equiv c$（c 为常数），则结论显然成立。

若 $f(x)$ 不恒为常数，则存在 $x_0\in(a,b)$，使
$$f(x_0)\neq\lim_{x\to a+0} f(x)=A$$
不妨设 $f(x_0)<A$，所以存在 $x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_0<x_2$，使得当 $x\in(a,x_1)$ 或 $x\in(x_2,b)$ 时，有
$$f(x)>f(x_0)$$
由于 $f(x)$ 于 $[x_1,x_2]$ 可导，故连续，因此 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 可达到最小值。设 $x=\xi$ 为最小值点，显然 $x=\xi$ 也是 $f(x)$ 在 (a,b) 中的最小值点，故由费马定理知，$f'(\xi)=0$。

顺便指出，当 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 为正，负无穷时，上述命题也是成立的。这里证明从略。

例 6 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导，且对一切x都有 $xf'(x)+f(x)\neq 0$，试证对一切 $x\neq 0$，必有 $f(x)\neq 0$。

证 设 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，且对一切 x 都有

$$F'(x)=xf'(x)+f(x)\neq 0$$

假设存在 $x_0\neq 0$，使 $f(x_0)=0$，则

$$F(x_0)=0=F(0)$$

故由罗尔定理，存在 ξ 位于 $0,x_0$ 之间，使 $F'(\xi)=0$

即 $$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$$

这与题设条件矛盾，因此当 $x\neq 0$ 时，$f(x)\neq 0$。

例 7 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，且对一切实数 x，都有 $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$，试证 $f(x)=0$ 的任何两个不同的根之间必有 $g(x)=0$ 的根。

证 设 x_1,x_2 为 $f(x)=0$ 的两个不同的根，不妨设 $x_1<x_2$，因为

$$f'(x_1)g(x_1)\neq f(x_1)g'(x_1)=0$$

所以 $g(x_1)\neq 0$。

同理可证 $g(x_2)\neq 0$。

假设 $g(x)=0$ 在 (x_1,x_2) 内无根，令 $F(x)=f(x)/g(x)$，则 $F(x)$ 于 $[x_1,\ x_2]$ 可导。由于

$$F(x_1)=F(x_2)=0$$

所以由罗尔定理，存在 $\xi\in(x_1,\ x_2)$，使

$$F'(\xi)=0$$

即 $$\frac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}=0$$

故 $$f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)$$

这与题设条件矛盾，从而必存在 $\xi\in(x_1, x_2)$，使

$$g(\xi)=0$$

如果在拉格朗日定理中令 $f(a)=f(b)$，则立刻可得出罗尔定理的结论。因此拉格朗日定理是罗尔定理的推广。所以拉格朗日定理比起罗尔定理来用处更加广泛，不仅在微分理论中，而且在极限理论中拉格朗日定理的作用也是十分重要的。同罗尔定理一样，拉格朗日定理不一定在 $f(x)$ 的整个定义域上应用，而经常被用在 $f(x)$ 的定义域内某个适当的小区间上。

例 8 设 $f'(x)$在$x=a$的右极限存在且有限，则 $f(x)$ 在a点的右极限也存在且有限。

证 因为$\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$存在且有限，所以存在$\delta>0$，使得$f'(x)$在$(a, a+\delta)$内有界，设 $|f'(x)|\leqslant M$。则对任意给定的$\varepsilon>0$，取 $\eta=\min\left(\frac{\varepsilon}{M}, \delta\right)$，当 x'，$x''\in(a, a+\eta)$时

$$\left|\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\right|=|f'(\xi)|\leqslant M$$

（其中 ξ位于x'，x'' 之间）

所以 $$|f(x')-f(x'')|\leqslant M|x'-x''|\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

故由柯西收敛原理知$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 存在且有限。

例 9 若$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$可导，且$|f'(x)|\leqslant\alpha<1$，任取$x_0\in(-\infty, +\infty)$，令$x_n=f(x_{n-1})(n=1, 2, \cdots)$，则$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的极限是$f(x)=x$的唯一解。

证 任取 x，$y\in(-\infty, +\infty)$，由拉格朗日定理：存在 ξ 位于 x，y 之间，使

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)|\ |x-y|\leqslant\alpha\ |x-y|$$

由 §2.2 例 8 知本命题成立。

例10 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内 $f''(x)$ 存在，联结点 $M(a, f(a))$ 与点 $N(b, f(b))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于 $G(c, f(c))$，其中 $a<c<b$。试证在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$。

证 因为 $f(x)$ 于 $[a, c]$ 连续，于 (a, c) 可导，所以由拉格朗日定理知，存在 $\xi_1\in(a, c)$ 使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

同理，存在 $\xi_2\in(c,b)$，使

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

由于 $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$ 及 $\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$ 都是联结 M，N 两点的直线斜率，所以 $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$

故 $$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$$

由于 $f'(x)$ 于 $[\xi_1, \xi_2]$ 可导，所以由罗尔定理知，存在 $\xi\in(\xi_1, \xi_2)$，使 $f''(\xi)=0$。

例11 若 $f(x)$ 于 (a, b) 内可导，则于 (a, b) 中任一点 x_0 必存在收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，使

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n)=f'(x_0).$$

证 设 $y_n\in(a,b)$，$y_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，则

$$f'(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}\tag{3.2.3}$$

由拉格朗日定理，存在x_n位于y_n，x_0之间，使得

$$\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}=f'(x_n)\quad(n=1,2,\cdots)\tag{3.2.4}$$

所以由式(3.2.3)及(3.2.4)得

$$\lim_{n\to\infty}f'(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}=f'(x_0)$$

有的命题的证明需要反复多次应用拉格朗日定理，然后再用取极限的方法而使命题得以证明。

例12 设 $f(x)$ 于$[0,1]$可导，且 $f(0)=0$，$|f'(x)|\leqslant|f(x)|$，则$f(x)\equiv0$。

证 任取 $x_0\in(0,1]$，由拉格朗日定理知，存在 $\xi_1\in(0,x_0)$，使

$$\frac{f(x_0)}{x_0}=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=f'(\xi_1)$$

所以 $$|f(x_0)|=|f'(\xi_1)|\cdot x_0\leqslant|f(\xi_1)|\cdot x_0$$

同理，存在 $\xi_2\in(0,\xi_1)$，使

$$|f(\xi_1)|\leqslant|f(\xi_2)|\cdot\xi_1$$

这样一直进行下去，一般地，对正整数 n，存在 $\xi_n\in(0,\xi_{n-1})$，使

$$|f(\xi_{n-1})|\leqslant|f(\xi_n)|\cdot\xi_{n-1}\leqslant|f(\xi_n)|\cdot\xi_1$$

所以

$$|f(x_0)|\leqslant|f(\xi_1)|\cdot x_0\leqslant|f(\xi_1)|\leqslant|f(\xi_2)|\cdot\xi_1\leqslant\cdots$$
$$\leqslant|f(\xi_n)|\cdot\xi_1^{n-1}$$

由于 $f(x)$ 于〔0, 1〕连续，所以存在 $M>0$，使

$$|f(x)|\leqslant M$$

故 $$|f(x_0)|\leqslant M\xi_1^{n-1}$$

上式对一切正整数 n 都成立。由于 $0<\xi_1<1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}M\xi_1^{n-1}=0$$

从而 $f(x_0)=0$，故由 x_0 的任意性得

$$f(x)\equiv 0$$

例13 （例 12 的推广）设 $f(x)$ 于闭区间〔a、b〕上可导，且满足 $f(a)=0$，$|f'(x)|\leqslant L|f(x)|$（L 为常数），试证 $f(x)\equiv 0$。

证 取充分大的正整数 N，使 $L/N<1$，令

$$x_k=a+\frac{k}{N}(b-a)\qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$$

由于 $f(x)$ 于〔a，b〕连续，因此存在 $M>0$，使

$$|f(x)|\leqslant M$$

当 $x\in(x_0,\ x_1)$ 时，由拉格朗日定理，存在 $\xi_1\in(x_0,\ x)$，使

$$|f(x)|=|f(x)-f(x_0)|$$

$$=|f'(\xi_1)|\ |x-x_0|\leqslant\frac{L}{N}|f(\xi_1)|$$

同理，存在 $\xi_2\in(x_0,\ \xi_1)$，使

$$|f(\xi_1)|\leqslant\frac{L}{N}|f(\xi_2)|$$

将这个过程一直进行下去。一般地，对正整数 n，存在 $\xi_n\in(x_0,\ \xi_{n-1})$，使

$$|f(\xi_{n-1})|\leqslant\frac{L}{N}|f(\xi_n)|$$

所以

$$|f(x)|\leqslant\frac{L}{N}|f(\xi_1)|\leqslant\left(\frac{L}{N}\right)^2|f(\xi_2)|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{L}{M}\right)^n|f(\xi_n)|$$

上式对一切正整数 n 都成立。由于 $L/N<1$，$|f(\xi_n)|\leqslant M$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L}{N}\right)^n|f(\xi_n)|=0$$

从而 $|f(x)|=0$ 。故当 $x\in[x_0,\ x_1]$ 时，有

$$f(x)\equiv 0$$

特别，$f(x_1)=0$。从而同以上证明方法一样，可以证明当 $x\in[x_1,\ x_2]$时，有

$$f(x)\equiv 0$$

类似可证：当$x\in[x_2,\ x_3]$，$x\in[x_3,\ x_4]$，…，$x\in[x_{N-1},\ x_N]$ 时都有 $f(x)\equiv 0$

故在 $[a,\ b]$ 上有 $f(x)\equiv 0$。

若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在(包括无穷)，又 $x_n\neq a(n=1,\ 2,\ \cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，则$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.这个结论在函数极限理论中经常被用到。由于 $f'(x)$，$f''(x)$，…，$f^{(n)}(x)$ 也是x的函数。因此对这些导函数上述结论也是适用的，显然，它提供了求导函数极限的一种方法。

例14　试证

(1)　若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$都存在且有限，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(2)　若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)$ 都存在且有限，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$

(3)　若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)$ 都存在且有限，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$

证 （1） 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在且有限，所以

$$\lim_{n\to\infty}[f(n)-f(n-1)]=0 \tag{3.2.5}$$

由拉格朗日定理，存在$x_n\in(n-1, n)$，使得

$$f'(x_n)=\frac{f(n)-f(n-1)}{n-(n-1)}=f(n)-f(n-1)$$

故由式(3.2.5)得

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n)=0$$

由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$存在且有限，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$，所以

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{n\to\infty} f'(x_n)=0$$

（2） 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)$存在且有限，所以存在$A_1>0$及$M>0$，使得当$x>A_1$时，$|f''(x)|\leqslant M$。所以，对任意给定的$\varepsilon>0$，令$\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$，则当$x_1$，$x_2>A_1$，且$|x_1-x_2|<\delta$时

$$\begin{aligned}|f'(x_1)-f'(x_2)| &= |f''(\xi)|\ |x_1-x_2|\\ &<M\cdot\varepsilon/M=\varepsilon\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

其中ξ位于x_1，x_2之间

因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在且有限，所以对上述$\delta>0$，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=0$$

由拉格朗日定理，存在$\theta(x)(0<\theta(x)<1)$使得

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=f'(x+\delta\cdot\theta(x))$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty} f'(x+\delta\cdot\theta(x))=0$$

故存在$A_2>0$，当$x>A_2$时

$$|f'(x+\delta\cdot\theta(x))|<\varepsilon \tag{3.2.7}$$

令$A=\max(A_1, A_2)$，则当$x>A$时，由式(3.2.6)及式(3.2.7)得

$$|f'(x)|\leqslant|f'(x)-f'(x+\delta\cdot\theta(x))|+$$

$$+ |f'(x+\delta\cdot\theta(x))| < 2\varepsilon$$

故 $$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$$

由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)$都存在且有限，故由(1)得

$$\lim_{x\to+\infty} f''(x)=0$$

因此 $$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty} f''(x)=0$$

(3) 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)$存在且有限，所以同(2)的证明方法一样，可以证明：对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$及$A>0$，当x_1，$x_2>A$且$|x_1-x_2|<2^k\delta$时

$$|f^{(k-1)}(x_1)-f^{(k-1)}(x_2)|<\varepsilon \tag{3.2.8}$$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在且有限，所以对上述的$\delta>0$，有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=0$$

由拉格朗日定理，存在$\theta_1(x)(0<\theta_1(x)<1)$，使得

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=f'(x+\delta\cdot\theta_1(x))$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty} f'(x+\delta\cdot\theta_1(x))=0$$

因为$f''(x)$存在，所以由拉格朗日定理知，存在$0<\theta(x)<1$，使得

$$\frac{f'(x+\delta+\delta\cdot\theta_1(x+\delta))-f'(x+\delta\cdot\theta_1(x))}{\delta+\delta\cdot\theta_1(x+\delta)-\delta\cdot\theta_1(x)}$$
$$=f''(x+(\delta+\delta\cdot\theta_1(x+\delta)-\delta\cdot\theta_1(x))\theta(x))$$

由于 $$0<(\delta+\delta\cdot\theta_1(x+\delta)-\delta\cdot\theta_1(x))\cdot\theta(x)$$
$$<(2\delta-\delta\cdot\theta_1(x))\theta(x)<2\delta\cdot\theta(x)$$

所以令$\theta_2(x)=\frac{1}{2}(1+\theta_1(x+\delta)-\theta_1(x))\cdot\theta(x))$，则$0<\theta_2(x)<1$，

从而 $$\frac{f'(x+\delta+\delta\cdot\theta_1(x+\delta))-f'(x+\delta\cdot\theta_1(x))}{\delta+\delta\cdot\theta_1(x+\delta)-\delta\cdot\theta_1(x)}$$

$$=f''(x+2\delta\cdot\theta_2(x)) \qquad (3.2.9)$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x+\delta\cdot\theta_1(x))=0$，故由式（3.2.9)得

$$\lim_{x\to+\infty} f''(x+2\delta\cdot\theta_2(x))=0$$

递推可得，对正整数 i ($1\leqslant i\leqslant k-1$)，存在$0<\theta_i(x)<1$，使得

$$\frac{f^{(i-1)}(x+\delta+\delta\cdot\theta_{i-1}(x+\delta))-f^{(i-1)}(x+\delta\cdot\theta_{i-1}(x))}{\delta+\delta\cdot\theta_{i-1}(x+\delta)-\delta\cdot\theta_{i-1}(x)}$$

$$=f^{(i)}(x+2^{i-1}\delta\cdot\theta_i(x))$$

且
$$\lim_{x\to+\infty} f^{(i)}(x+2^{i-1}\delta\cdot\theta(x))=0$$

特别地有

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k-1)}(x+2^{k-2}\delta\cdot\theta_{k-1}(x))=0$$

故存在 $A'>0$，当 $x>A'$ 时

$$|f^{(k-1)}(x+2^{k-2}\delta\cdot\theta_{k-1}(x))|<\varepsilon \qquad (3.2.10)$$

令 $A^*=\max(A, A')$，则当 $x>A^*$ 时，由式(3.2.8) 及(3.2.10)可得

$$|f^{(k-1)}(x)|\leqslant|f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(x+2^{k-2}\delta\cdot\theta_{k-1}(x))|$$
$$+|f^{(k-1)}(x+2^{k-2}\delta\cdot\theta_{k-1}(x))|<2\varepsilon$$

故$\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k-1)}(x)=0$。

用以上类似的方法，由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k-1)}(x)$ 存在且有限，可得

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k-2)}(x)=0$$

类似可得

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k-3)}(x)=\lim_{x\to+\infty} f^{(k-4)}(x)=\cdots=\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k-1)}(x)$ 及$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)$都存在且有限，所以由(1)得

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0$$

故 $$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty} f''(x)=\cdots=\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0$$

下面介绍一种用导函数的极限确定函数在某点的导数的方法。

例15 设$f(x)$在$[a, a+\delta]$上连续，在$(a, a+\delta)$内可导，试证若$\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$存在（有限或无穷），则

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a+0} f'(x)。$$

证 当$x\in(a,a+\delta)$时，由拉格朗日定理，存在$\xi\in(a,x)$，使得

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)$$

由于$\xi\in(a,x)$，所以当$x\to a+0$时，$\xi\to a+0$，又由于$\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$存在，故

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\xi\to a+0} f'(\xi)=\lim_{x\to a+0} f'(x)$$

即 $$f'_+(a)=\lim_{x\to a+0} f'(x)$$

用同样的方法可以证明：设$f(x)$于$[a-\delta, a]$连续，在$(a-\delta, a)$可导，若$\lim\limits_{x\to a-0} f'(x)$存在（有限或无穷），则

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a-0} f'(x)$$

由此可以看出，若$f(x)$于$[a-\delta, a+\delta]$连续，在$(a-\delta,a)$及$(a, a+\delta)$内可导，且$\lim\limits_{x\to a} f'(x)$存在（有限或无穷），则

$$f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x)$$

利用上述结果，可以证明：若$f(x)$于某个区间内可导，则$f'(x)$在这个区间内不可能有第一类间断点。就是说，$f'(x)$于这个区间内或者连续，或者有第二类间断点。

事实上，假设x_0是$f'(x)$的一个间断点，且$\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$及

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$ 都存在有限的极限，则

$$f_+'(x_0)=\lim_{x\to x_0-0} f'(x)$$

$$f_-'(x_0)=\lim_{x\to x_0+0} f'(x)$$

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$，则 $f_+'(x_0)\neq f_-'(x_0)$，所以 $f'(x_0)$ 不存在．这与已知条件 $f'(x)$ 存在相矛盾。

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$，则 $f_+'(x_0)=f_-'(x_0)$，故 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$．因此 $f'(x)$ 在 x_0 连续．这与假设 x_0 是 $f'(x)$ 的间断点相矛盾。

因此 $f'(x)$ 只能有第二类间断点．从而可以断定：如果 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$ 都存在且有限，但 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f'(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0}f'(x)$，则 $f'(x_0)$ 不存在。

一些命题的证明用柯西定理更方便些，比如求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$，如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则由 $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$（$\xi$ 位于 x 与 a 之间）．可以断定 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 也存在。因此求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ 便转化为求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

例16 设
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$
其中 $g(0)=g'(0)=0$，$g''(0)$ 存在，试证 $f'(0)$ 存在。

证 由于

$$g''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{x} \tag{3.2.11}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to}\frac{g(x)}{x^2}$$

由柯西定理知

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(\xi)}{2\xi}\text{（}\xi\text{ 位于 }x\text{ 与 }0\text{ 之间）}$$

由于当 $x\to 0$ 时，$\xi\to 0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g'(x)}{x}$ 存在，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{g'(\xi)}{2\xi}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}g''(0) \tag{3.2.12}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0) \tag{3.2.13}$$

所以由式(3.2.11)(3.2.12)及(3.2.13)知 $f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=\frac{1}{2}g''(0)$。

利用“若 $f'(x)\geqslant 0$（或 $f'(x)\leqslant 0$），则 $f(x)$ 单调上升（或单调下降）”的结论来证明命题，这在第一章极限理论中已多次用到，在微分理论中也更是如此，现仅举一例说明。

例17 设 $f(x)$ 于 $[0,\infty)$ 连续，$f'(x)$ 于 $(0,+\infty)$ 存在，且 $f'(x)$ 单增及 $f(0)=0$。令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$（$x>0$），试证 $g(x)$ 单增。

证 当 $x>0$ 时

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

由拉格朗日定理，存在$\xi\in(0, x)$，使

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$$

由于$f'(x)$单增，所以

$$f'(\xi)\leqslant f'(x)$$

故

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$=\frac{f'(x)-\frac{f(x)}{x}}{x}$$

$$=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}\geqslant 0$$

从而$g(x)$单增.

练 习 题

1. 若$f'(x)\equiv a$（a为常数），则$f(x)=ax+b$，其中b为常数。

2. 设$f(x)$于$(-\infty, +\infty)$有定义，且满足对任意的x，y有：$|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2$，试证$f(x)$为常数。

3. 若$f'(x)$在有穷或无穷区间I上有界，则$f(x)$在I上一致连续。

4. 若$f'(x)$在有穷区间I上有界，则$f(x)$在I上有界。

5. 设$f(x)$在$(a, +\infty)$上可导，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0。$$

6. 若$f(x)$在$[0, 1]$上有三阶导数，且，$f(1)=0$，设$F(x)=x^3f(x)$，则在$(0, 1)$内至少有一点ξ，使$F'''(\xi)=0$。

7. 若$f'_+(a)>0$，$f'_-(a)<0$，则存在a的一个邻域，使得在此邻域内$f(x)\geqslant f(a)$。

8. 若$f(x)$在$[a, b]$连续，$f(a)=f(b)=0$，且$f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，则$f(x)$在(a, b)内至少有一个零点。

9. 若$f(x)$于$[a, b]$连续，于(a, b)可导，且$f(a)=f(b)$，$f(x)$不恒为常数，则必存在$\xi\in(a, b)$，使$f'(\xi)>0$。

10. 若$f(x)$在$[a, b]$连续，在(a, b)有二阶导数，且$f(a)=f(b)=0$，$f(c)>0$，其中$a<c<b$，则至少有一点$\xi\in(a, b)$，使$f''(\xi)<0$。

11. 试证方程

$$1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}=0$$

当n为奇数时有一实根，当n为偶数时无实根。

12. 若非线性函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)中可导，试证存在$\xi\in(a, b)$，使

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|。$$

13. 设$f(x)$于$[a, b]$连续，如果对$[a, b]$中任意两点x_1，x_2总有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称$f(x)$在$[a, b]$上凸。若总有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称$f(x)$在$[a, b]$下凸。试证

（1）若$f(x)$于$[a, b]$上凸（或下凸），$x_0\in[a, b]$，$f(x)$于x_0可导，则对任意的$x\in[a, b]$，都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\ (\text{其中 } x_0\neq x)$$

$$(\text{或}f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\ (\text{其中}x\neq x_0)$$

（2）设$f(x)$于$[a, b]$连续，于(a, b)可导，则$f(x)$于$[a, b]$上凸（或下凸）的充要条件是：$f'(x)$于(a, b)单调下降（或单调上升）。

（3） 设$f(x)$于$[a, b]$可导，则$f(x)$于$[a, b]$上凸（或下凸）

的充要条件是：对任意的x_1，$x_2\in(a,b)$，总有

$$f(x_2)\leqslant f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$$

$$(\text{或}f(x_2)\geqslant f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1))。$$

§3.3　洛毕达（L'Hospital）法则

基础理论

1.　洛毕达法则 1

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 a 的一个去心邻域内可导，并且 $g'(x)\neq0$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$有限或$\pm\infty$），则

（1）　当$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$时

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

（2）　当$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$时

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

2.　洛毕达法则 2

设$f(x)$和$g(x)$当$|x|$充大时都可导，并且$g'(x)\neq0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$有限或$\pm\infty$）则

（1）　当$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$时

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

（2）　当$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$时

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

洛毕达法则是柯西定理的一个重要应用，它提供了求不定型极限的一种重要方法。在第二章中我们知道，如果 $f(x)\to A$，$g(x)\to B$，当 B 有限且 $B\neq 0$ 时，则 $\frac{f'(x)}{g'(x)}\to\frac{A}{B}$。但是当 A，B 都是零或都是无穷时，则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限就不易求出。而洛毕达法则正是针对这种情况，在极限 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在的条件下解决了这种难题。由于 $0\cdot\infty$ 型、$\infty-\infty$ 型、0^{0} 型、∞^{0} 型及 1^{∞} 型的不定型都可以化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，因此许多不定型极限都可以通过洛毕达法则而得以解决。

有时可能遇到如下问题。用洛毕达法则求不定型的极限时，其极限表达式越变越复杂，从而极限无法求得。例如求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x}$，如果直接利用洛毕达法则，则有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}\cdot\frac{1}{x^2}}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

如果再用一次洛毕达法则，则又有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}\cdot\frac{1}{x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{2x^3}$$

无论用多少次洛毕达法则都不能确定其极限。此时可采用如下方法：将分子的倒数换到分母上，而将分母的倒数换到分子上，使原来的 $\frac{0}{0}$ 型换成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型。这样一般问题都可以得到解决。如上面所举的例子求法如下：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{1/x}}$$

$$=0$$

在命题的证明中也经常利用洛毕达法则这一有力工具，从而使证明过程更加简单化。例如本章§3.2例14(1)的证明中，如果利用洛毕达法则，则命题极易得证，现证明如下：

由洛毕达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(x) \tag{3.3.1}$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

故由式(3.3.1)得

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$$

对于利用洛毕达法则求函数的不定型极限，其方法都是大家熟悉的，下面介绍利用洛毕达法则求数列极限的方法。

如果数列$\{x_n\}$具有$x_n=f(n)$（或$x_n=f\left(\frac{1}{n}\right)$的形式，$f(n)$（或$f\left(\frac{1}{n}\right)$)是不定型，但极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$（或$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$）可以用洛毕达法则求出，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$（或$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$）的极限即为$\{x_n\}$的极限，这可由§2.1基础理论4推导而来。

例1 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$（$\alpha>0$）。

此题已在§1.1例1中用数列极限的定义的方法证出，这里我们采用洛毕达法则很容易就可以求出其极限。

解 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^a}=0$$

例 2 求 $\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$。

解 设 $A_n=\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$，则

$$\ln A_n=n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)=\frac{\ln\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln A_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln An}=e^{-\frac{1}{6}}$$

需要特别指出的是：利用洛毕达法则求极限 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$，是在 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在的条件下进行的。如果 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 未必不存在。例如求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}$，这显然是不定型的，且

$$\frac{(x-\sin x)'}{(x+\cos x)'}=\frac{1-\cos x}{1-\sin x}$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1-\sin x}$ 不存在，但

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=1$$

是存在的。

练 习 题

1. 利用洛毕达法则求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x\ln x)}{x^a}$ $(a>0)$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$；（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 e^{-n^2}$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\sin\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{3}}}$ $(a>0)$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\tan\dfrac{n\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$；　　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\dfrac{1}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} n^4\left[\cos\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)-\cos\dfrac{1}{n}\right]$；

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cot\dfrac{1}{n}-n\right)$.

2. 设 $f(0)=0$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f'(0)\neq 0$，试证 $\lim\limits_{x\to 0}x^{f(x)}=1$。

§3.4 泰勒(Taylor)公式

基础理论

1. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有直到 $n+1$ 阶连续导数，那么

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(其中 ξ 在 x 与 x_0 之间)

此式称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点附近关于 $x-x_0$ 的幂函数展开式，也叫**泰勒公式**，$R_n(x)$ 叫做拉格朗日余项。

2. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有直到 n 阶连续导数，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

3. 五个重要的泰勒展开式：

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$；

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})；$$

(3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+$

$$+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})；$$

(4) $(1+x)^a=1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2!}x^2+$

$$+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)；$$

(5) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

由于在基础理论1中令 $n=0$，则得

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$

即

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$$

而此式就是拉格朗日定理，因此泰勒公式是拉格朗日定理的推

广，从而可以将泰勒展开式更方便地运用到求极限或命题的证明中去。

例 1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^4(\cos\frac{1}{n} - e^{-1/2n^2})$。

解 由泰勒公式有

$$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2!n^2} + \frac{1}{4!n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$e^{-1/2n^2} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{-1}{2n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

于是
$$\cos\frac{1}{n} - e^{-1/2n^2} = -\frac{1}{12n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

故

$$\lim_{n\to\infty} n^4\left(\cos\frac{1}{n} - e^{-1/2n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^4\left[-\frac{1}{12n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{12}$$

例 2 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n})$。

解 因为

$$n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}\right)$$

$$= n^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 2\right)$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2n}$$

$$+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{n}}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2n}$$

$$+\frac{1}{2!}\ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

所以

$$n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\right)$$

$$=n^2\left[-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

故

$$\lim_{n\to\infty}n^{3/2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=-\frac{1}{4}$$

例3 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$。

解 因为

$$e^x\sin x=\left[1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right]$$

$$=x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

所以
$$\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$。

解 因为

$$\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}$$

$$=x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\left[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$=x^3\left[1+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$\sqrt{x^6+1}=x^3\left(1+\frac{1}{x^6}\right)^{1/2}$$

$$=x^3\left[1+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^3\left[\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]=\frac{1}{6}$$

通过以上四例可以看出利用泰勒公式求极限的方法：先将所求的极限表达式化成“0·∞”的形式，再将极限为零的部分表达式用泰勒公式在 $x=0$ 点展开，一直展开到不低于无穷大量部分的阶数，然后再整理化简即可极其容易地求出所要求的极限来。

在命题的证明中利用泰勒公式，其方法也和求极限时情形类似，将所需要的函数展成若干项，再经过四则运算将式子化简，通过求极限或其它手段达到证明命题的目的。

例 5 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，若

$$g(x)=\begin{cases} f'(0) & x=0 \\ \dfrac{f(x)}{x} & x\neq 0 \end{cases}$$

则 $g(x)$ 具有一阶连续导数。

证 显然，当 $x\neq 0$ 时，$g(x)$具有一阶连续导数，且

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

下面证明 $g'(x)$ 在 $x=0$点存在且连续。

由于
$$\frac{g(x)-g(0)}{x}=\frac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}$$

$$=\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2} \tag{3.4.1}$$

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(\theta x)\quad (0<\theta<1)$$

所以

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}=\frac{f(0)+\frac{1}{2}x^2f''(\theta x)}{x^2}=\frac{1}{2}f''(\theta x)$$

由$f''(x)$的连续性知

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}f''(\theta x)=\frac{1}{2}f''(0) \tag{3.4.2}$$

故$g(0)$存在，且$g'(0)=\frac{1}{2}f''(0)$

由于 $x\neq 0$ 时

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$=\frac{x(f'(x)-f'(0))+xf'(0)-f(x)}{x^2}$$

$$=\frac{f'(x)-f'(0)}{x}-\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)$$

由式(3.4.1)及(3.4.2)知

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0)$$

因此

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=f''(0)-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0)$$

故$g'(x)$在$x=0$也连续。

例 6 设$f(x)$满足条件：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$（$c$ 有限），及 $\lim\limits_{x\to\infty}f'''(x)=0$，试证 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$。

证 由泰勒公式

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi)$$

$$(x<\xi<x+1) \qquad (3.4.3)$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\eta)$$

$$(x-1<\eta<x) \qquad (3.4.4)$$

由式(3.4.3)及(3.4.4)得

$$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi)+\frac{1}{6}f'''(\eta)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}f(x+1)-\frac{1}{2}f(x-1)-\frac{1}{12}f'''(\xi)-\frac{1}{12}f'''(\eta)$$

由于当 $x\to\infty$ 时，$\xi\to\infty$ 且 $\eta\to\infty$，故

$$\lim_{x\to\infty}f''(x)=\lim_{x\to\infty}\Big[f(x+1)+f(x-1)$$

$$-2f(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi)+\frac{1}{6}f'''(\eta)\Big]$$

$$=c+c-2c=0$$

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\Big[\frac{1}{2}f(x+1)-\frac{1}{2}f(x-1)$$

$$-\frac{1}{12}f'''(\xi)-\frac{1}{12}f'''(\eta)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}c=0$$

例7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，试证存在 $c\in(a,b)$，使

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c).$$

证 由泰勒公式得

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\ \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi_1)\qquad\left(\frac{a+b}{2}<\xi_1<b\right)$$

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\ \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi_2)\quad\left(a<\xi_2<\frac{a+b}{2}\right)$$

两式相加并移项得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)$$

$$=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]\frac{(b-a)^2}{4}$$

若$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$，只要取$c=\xi_1$或$c=\xi_2$，则

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c)$$

若$f''(\xi_1)\neq f''(\xi_2)$，不妨设$f''(\xi_1)<f''(\xi_2)$，则

$$f''(\xi_1)<\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]<f''(\xi_2)$$

由达布定理，存在$c\in(\xi_2,\ \xi_1)$，使得

$$f''(c)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$$

所以
$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c)$$

例 8 设$f(x)$于$[a,b]$有二阶导数，且$f'(a)=f'(b)=0$，则存在$c\in(a,b)$，使

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证法一 由泰勒公式得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)$$

$$=f(a)+\frac{b-a}{2}f'(a)+\frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{4}f''(c_1)$$

$$=f(a)+\frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{4}f''(c_1)$$

$$\left(a<c_1<\frac{a+b}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(b-\frac{b-a}{2}\right)$$

$$=f(b)-\frac{b-a}{2}f'(b)+\frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{4}f''(c_2)$$

$$=f(b)+\frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{4}f''(c_2)$$

$$\left(\frac{a+b}{2}<c_2<b\right)$$

两式相减并移项得

$$\frac{1}{2}[f''(c_1)-f''(c_2)]=\frac{4}{(b-a)^2}[f(b)-f(a)]$$

所以

$$\frac{1}{2}|f''(c_1)|+\frac{1}{2}|f''(c_2)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

不妨设 $|f''(c_1)|\geqslant|f''(c_2)|$，令 $c=c_1$，则

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

证法二 由柯西定理得

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}=\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2-(a-a)^2}$$

$$=\frac{f'(\xi_1)}{2(\xi_1-a)}\quad\left(a<\xi_1<\frac{a+b}{2}\right)$$

再由拉格朗日定理及 $f'(a)=0$ 得

$$\frac{f'(\xi_1)}{2(\xi_1-a)}=\frac{f'(\xi_1)-f'(a)}{2(\xi_1-a)}=\frac{1}{2}f''(c_1)$$

$$(a<c_1<\xi_1)$$

故
$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}=\frac{1}{2}f''(c_1)\qquad(3.4.5)$$

同理，存在 $\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},\ b\right)$ 及 $c_2\in(\xi_2,\ b)$，使得

故
$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)}{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}=\frac{f'(\xi_2)}{2(\xi_2-b)}=\frac{1}{2}f''(c_2)\qquad(3.4.6)$$

由式(3.4.5)减(3.4.6)得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\frac{(b-a)^2}{4}}=\frac{1}{2}[f''(c_1)-f''(c_2)]$$

不妨设 $|f''(c_1)|\geqslant|f''(c_2)|$，令 $c=c_1$，则

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

下面介绍一种很有意思的证明方法，如果$f(x)$于$(-\infty, +\infty)$无穷次可微，为了证明$f(x)=0$，将$f(x)$在$x=0$点展开，先证明对任意非负整数k，都有$f^{(k)}(0)=0$，则$f(x)$的展开式中只有其余项可能非零，但由k的任意性，令$k\to\infty$可得余项的极限为零，从而证得$f(x)=0$。

例9 设$f(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的无穷次可微函数，且满足：

(1)存在$L>0$，使得对于所有的$x\in(-\infty, +\infty)$及任意的正整数n，有$|f^{(n)}(x)|\leqslant L$；

(2)$f\left(\frac{1}{n}\right)=0 \qquad (n=1,2,\cdots)$。

试证$f(x)=0$。

证 先用归纳法证明：对任何非负整数k，都存在数列$\{x_n^{(k)}\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(k)}=0$且$f^{(k)}(x_n^{(k)})=0(n=1,2,\cdots)$。

显然当$k=0$时，只要取$x_n^{(0)}=\frac{1}{n} \quad (n=1,2,\cdots)$，则结论成立。

假设$k=m$时结论成立，即存在$x_n^{(m)}\to 0(n\to\infty)$，且

$$f^{(m)}(x_n^{(m)})=0 \qquad (n=1,2,\cdots)。$$

由拉格朗日定理，存在$x_n^{(m+1)}$位于$x_n^{(m)}$与$x_{n+1}^{(m)}$之间，

使
$$f^{(m+1)}(x_n^{(m+1)})=\frac{f^{(m)}(x_n^{(m)})-f^{(m)}(x_{n+1}^{(m)})}{x_n^{(m)}-x_{n+1}^{(m)}}=0$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(m)}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(m+1)}=0$，因此当$k=m+1$时结论也成立。从而对任何非负整数$k$，存在数列$\{x_n^{(k)}\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(k)}=0$，且$f^{(k)}(x_n^{(k)})=0 \quad (n=1,2,\cdots)$。

由于$f^{(k)}(x)$连续，因此

$$f^{(k)}(0)=\lim_{n\to\infty}f^{(k)}(x_n^{(k)})=0 \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

从而对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$，由泰勒公式

$$|f(x)|=|f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$+\frac{f^{(k+1)}(\theta x)}{(k+1)!}x^{k+1}|$$

$$=\left|\frac{f^{(k+1)}(\theta x)}{(k+1)!}x^{k+1}\right|\leqslant\frac{L}{(k+1)!}|x|^{k+1}$$

（其中$0<\theta<1$）

上式对任意非负整数k都成立，令$k\to\infty$得

$$f(x)=0$$

故$f(x)\equiv0$。

在§3.2例14中，我们曾证得"若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)$都存在且有限，则

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$"的结论，其证明方法是比较复杂的。这里我们利用泰勒公式及代数学中的解线性方程组的方法，可以比较容易地证得上述结论。

例10 设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)$都存在且有限，则

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\cdots=\lim_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0。$$

证 首先证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$。

假设$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=a\neq0$，不妨设$a>0$，则存在$x_0>0$，当$x>x_0$时

$$f^{(k)}(x)>\frac{a}{2}$$

所以
$$f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(x_0)=f^{(k)}(\xi)(x-x_0)$$

$$>\frac{a}{2}(x-x_0)\ （其中\xi\in(x_0,x)）$$

故

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k-1)}(x)=+\infty$$

同样，由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k-1)}(x)=+\infty$ 可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k-2)}(x)=+\infty$.
故递推可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，这与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限相矛盾，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0$。

下面证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k-1)}(x)=0$

由泰勒公式得

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)+$$

$$+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)+\frac{1}{k!}f^{(k)}(\xi_1)$$

$$f(x+2)=f(x)+2f'(x)+\frac{2^2}{2!}f''(x)+$$

$$+\cdots+\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)+\frac{2^k}{k!}f^{(k)}(\xi_2)$$

………………………………………………

$$f(x+k-1)=f(x)+(k-1)f'(x)+\frac{(k-1)^2}{2!}f''(x)+$$

$$+\cdots+\frac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)+\frac{(k-1)^k}{k!}f^{(k)}(\xi_{k-1})$$

其中 $\xi_i\in(x,\ x+i)\qquad(i=1,2,\cdots,\ k-1)$)。

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0$，所以对上面 $k-1$ 个等式两边分别取极限得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[2f'(x)+\frac{2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)\right]=0$$

………………………………………

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(k-1)f'(x)+\frac{(k-1)^2}{2!}f''(x)+\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)\right]=0$$

故

$$f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)=\alpha(x)$$

$$2f'(x)+\frac{2^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)=\alpha_2(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(k-1)f'(x)+\frac{(k-1)^2}{2!}f''(x)+$$

$$+\cdots+\frac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)=\alpha_{k-1}(x)$$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_2(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_{k-1}(x)=0$。

令

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} \\ 2 & \frac{2^2}{2!} & \cdots & \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k-1 & \frac{(k-1)^2}{2!} & \cdots & \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(k-1)}(x) \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_{k-1}(x) \end{pmatrix}$$

则

$$AX=B$$

由代数学中的知识知道，矩阵 A 所对应的行列式 $|A|\neq 0$，所以 A^{-1} 存在，故

$$X=A^{-1}B$$

由于当 $x\to+\infty$ 时

$$B\to\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

所以

$$A^{-1}B\to\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \text{即 } X\to\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\cdots=\lim_{x\to+\infty}f^{(k-1)}(x)=0$$

练 习 题

1． 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)}$；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)\quad(a>0)$；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[6]{n^6+n^5}-\sqrt[6]{n^6-n^5}\right)$；

（4） $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}(a>0)$；

（5） $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$；

（6） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$；

（7） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\mathrm{c}\tan x\right)$；

（8） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-1}{x}$。

2. 设$f(x)$在$x=x_0$点附近有连续的二阶导数，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$$

3. 设 $f(x)$在 $[a, b]$ 上足够多次可导，则存在ξ，使得

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+(b-a)^3 f'''(\xi)$$

其中$a<\xi<b$。

4. 设$f''(x)>0$，则 $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

$$\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

等号仅在 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立。

5. 试证 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots x_n}$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n>0$

6. 设 $f'''(x)$在 $x=0$ 的附近连续，求

（1） $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f'(x)+f'(a)}{2f(x)-2f(a)}-\left(\frac{1}{x-a}\right)^2\right]$；

（2） $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)[f'(x)+f'(a)]-2f(x)+2f(a)}{(x-a)^3}$

$(f'(a)\neq 0)$

第四章　积　分

§4.1　定积分的定义及可积的充要条件

基础理论

1．设$f(x)$于$[a,b]$有界，将$[a,b]$作分划T：
$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，令$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$，
$\lambda=\max\limits_{1\leq k\leq n}\Delta x_k$，任取$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，作和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

如果当$\lambda\to0$时，这种和有极限，且此极限不依赖于ξ_k的选择，也不依赖于对$[a,b]$的分划，就称此极限为$f(x)$在$[a,b]$上的定积分。

如果$f(x)$在$[a,b]$的定积分存在，称$f(x)$在$[a,b]$可积。

定积分的定义用"$\varepsilon-\delta$"的说法表述如下：

设$f(x)$于$[a,b]$有界，如果存在定数I，使得对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$[a,b]$上的分划满足$\lambda<\delta$时，对任取的$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，都有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k-I\right|<\varepsilon$$

则称$f(x)$于$[a,b]$上可积，I称为$f(x)$在$[a,b]$上的定积分。记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I$$

2．有界函数 $f(x)$ 于〔a，b〕可积的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于〔a，b〕上的任意分划 T，只要 $\lambda<\delta$，则有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\,\Delta x_k<\varepsilon$$

其中 $\omega_k=\sup\{|f(x')-f(x'')|;\ x',\ x''\in[x_{k-1},\ x_k]\}$，称为 $f(x)$ 在〔x_{k-1}，x_k〕上的振幅。

3．设 T 是〔a，b〕上的一个分划，令

$$M_k=\sup\{f(x);\ x\in[x_{k-1},\ x_k]\}$$
$$m_k=\inf\{f(x);\ x\in[x_{k-1},\ x_k]\}$$

分别称 $\sum\limits_{k=1}^{n}M_k\,\Delta x_k$，$\sum\limits_{k=1}^{n}m_k\,\Delta x_k$ 为 $f(x)$ 在分划 T 下的大和与小和，分别记为 $S(T)$ 及 $s(T)$，分别称 $\inf\limits_{T}\{S(T)\}$、$\sup\limits_{T}\{s(T)\}$ 为 $f(x)$ 在〔a,b〕上的上、下积分，分别记为 $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ 及 $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$。

在〔a，b〕上的有界函数 $f(x)$ 可积的充要条件是：

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

其共同值即为 $f(x)$ 在〔a，b〕上的定积分。

4．〔a，b〕上的连续函数是可积的。

5．〔a，b〕上只有有限个间断点的有界函数是可积的。

6．〔a，b〕上的单调有界函数是可积的。

如果有界函数 $f(x)$ 在〔a，b〕上只有有限个间断点，或 $f(x)$ 在〔a，b〕上单调有界，则 $f(x)$ 是可积的。但对于在〔a，b〕上有无穷多个间断点的非单调的有界函数未必就不可积。比如〔a，b〕上有界函数 $f(x)$ 的间断点只有有限个聚点，则 $f(x)$ 一定在〔a，b〕上可积。如果 $f(x)$ 的间断点的聚点仍是无穷多个，$f(x)$ 也可能可积。下面根据以上提到的两种情况分别讨论其证明方法。

$f(x)$ 于〔a，b〕有界，其间断点的聚点只有有限个的情况：

设 $|f(x)|\leqslant M$。为了论述方便，不妨设 $f(x)$ 的间断点只有一个聚点，至于多于一个聚点的情况其证明方法类似，还假设聚点即为 a 点（聚点为 b 点时证明方法类似。当聚点 c 满足 $a<c<b$ 时，只要分别证明 $f(x)$ 于〔a，c〕及〔c，b〕都可积，则知 $f(x)$ 于〔a，b〕可积，因此假设聚点为 a 并不失一般性）。

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $a_1=a+\dfrac{\varepsilon}{8M}$。由于 $f(x)$ 于〔a_1，b〕只有有限个间断点，故 $f(x)$ 于〔a_1，b〕可积，因此存在 $\delta_1>0$，使得当 $\lambda<\delta_1$ 时

$$\sum{}_1\omega_k\,\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2}$$

令 $\delta=\min\left(\delta_1,\ \dfrac{\varepsilon}{8M}\right)$，在〔$a$，$b$〕上作分划：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

使得 $\lambda<\delta$，显然必存在 k_0 $(1\leqslant k_0\leqslant n)$，使 $x_{k_0-1}<a_1\leqslant x_{k_0}$，

则 $$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\,\Delta x_k\leqslant 2M\left(a_1-a+\frac{\varepsilon}{8M}\right)+\sum_{k=k_0+1}^{n}\omega_k\,\Delta x_k$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum{}_1 \omega_k \Delta x_k$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此得到 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的可积性。

例 1 试证 $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

于 $[0, 1]$ 可积。

证 显然 $|f(x)|\leqslant 1$，且 $x=0, 1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots$ 为 $f(x)$ 的间断点，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取充分大的正整数 N，使 $\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{4}$。由于 $f(x)$ 于 $\left[\frac{1}{N}, 1\right]$ 中只有 N 个间断点，取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{8N}, \frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right\}$，对 $[0, 1]$ 作分划 T：

$$0=x_0<x_1<\cdots\cdots<x_n=1$$

当 $\lambda<\delta$ 时，必存在某个 k_0 $(1\leqslant k_0\leqslant n)$，使

$$\frac{1}{N+1}<x_{k_0}\leqslant\frac{1}{N}$$

由于

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=\sum_{k=1}^{k_0}\omega_k\Delta x_k+\sum_{k=k_0+1}^{n}\omega_k\Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^{k_0}\omega_k\Delta x_k\leqslant 2\cdot\sum_{k=1}^{k_0}\Delta x_k$$

$$\leqslant 2\cdot\frac{1}{N}<2\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$$

而$\sum_{k=k_0+1}^{n}\omega_k\Delta x_k$中最多只有2N项非零，因此

$$\sum_{k=k_0+1}^{n}\omega_k\Delta x_k<2\cdot\delta\cdot 2N\leqslant 4N\cdot\frac{\varepsilon}{8N}=\frac{\varepsilon}{2}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

故 $f(x)$ 于〔0，1〕可积。

$f(x)$ 在〔a，b〕上间断点的聚点有无穷多个的情况：

在一般情况下，$f(x)$ 的可积性不能得以保证，但如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，满足 $\omega_x\geqslant\varepsilon$（$\omega_x$ 为 $f(x)$ 在 x 点的振幅）的点只有有限多个，则 $f(x)$ 于〔a，b〕可积。事实上，设 $f(x)$ 在〔a，b〕上使 $\omega_x\geqslant\varepsilon$ 的点有 N 个，对于〔a，b〕上任意一个分划，只要取 λ 充分小，则使 $\omega_k\geqslant\varepsilon$（$\omega_k$ 为 $f(x)$ 在〔x_{k-1}，x_k〕上的振幅）所对应的小区间〔x_{k-1}，x_k〕的个数必不大于 $2N$ 个，将 $\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k$ 分成两部分：一部分为使 $\omega_k<\varepsilon$ 的部分，记为 $\Sigma'\omega_k\Delta x_k$；另一部分为使 $\omega_k\geqslant\varepsilon$ 的部分，记为 $\Sigma''\omega_k\Delta x_k$。若设 $|f(x)|\leqslant M$，则当 $\lambda<\frac{\varepsilon}{4NM}$ 时，

$\Sigma''\omega_k\Delta_k x_k<2M\Sigma''\Delta x_k\leqslant 2M\cdot 2N\lambda<\varepsilon$。而 $\Sigma'\omega_k\Delta x_k<\varepsilon(b-a)$，因此可证得 $f(x)$ 于〔a，b〕的可积性。

例2 试证 $R(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & x=\frac{m}{n}\quad (m, n\text{互质})\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$

在〔0，1〕上可积，且积分为0。

证 显然 $0\leqslant R(x)\leqslant 1$，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取充分大的正整数 N，使得 $\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{2}$。由 §2.2 例 1 的证明知，使 $R(x)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 的点只有有限个，设为 m 个，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{4m}$，则对〔0，1〕上的任一分划 T：

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$$

及 $[x_{k-1},\ x_k]$ 中任取一点 $\xi_k(k=1,2,\cdots,n)$，当 $\lambda<\delta$ 时

$$\left|\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k)\ \Delta x_k\right|=\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k)\ \Delta x_k$$

$$=\sum_{k}{}' R(\xi_k)\ \Delta x_k+\ \sum_{k}{}'' R(\xi_k)\ \Delta x_k$$

其中 $\sum_{k}{}' R(\xi_k)\ \Delta x_k$ 表示 $\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k)\ \Delta x_k$ 中使 $R(\xi_k)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 所对应的所有项之和，$\sum{}'' R(\xi_k)\ \Delta x_k$ 表示 $\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k)\ \Delta x_k$ 中使 $R(\xi_k)<\frac{\varepsilon}{2}$ 所对应的所有项之和。

显然 $\sum_{k}{}'$ 中最多只有 $2m$ 项，所以

$$\sum_{k}{}' R(\xi_k)\ \Delta x_k\leqslant\sum_{k}{}'\ \Delta x_k<2m\delta=\frac{\varepsilon}{2}$$

又

$$\sum_{k}{}'' R(\xi_K)\ \Delta x_K<\frac{\varepsilon}{2}\ \sum_{k}{}''\Delta x_k$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\ \sum_{k=1}^{n}\ \Delta x_k=\frac{\varepsilon}{2}$$

故

$$\left|\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k)\ \Delta x_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

从而$R(x)$于〔0.1〕可积，且

$$\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x = 0$$

利用基础理论 2 不仅可以证明函数 $f(x)$ 于区间〔a,b〕的可积性，而且还经常利用基础理论 2 的否定命题证明函数的不可积性。其方法如下：先找出一适当的实数$\varepsilon_0>0$，再证明对任意的实数 $\delta>0$，都存在〔a，b〕上的一个分划T，使得 T 的直径 $\lambda<\delta$，但满足不等式

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k \geqslant \varepsilon_0$$

这就证明了函数 $f(x)$ 于〔a，b〕的不可积性。

例 3 设 $f(x)=\begin{cases} 1 & x\text{为无理数} \\ -1 & x\text{为有理数} \end{cases}$

试证 $f(x)$ 于〔0，1〕不可积。

证 取$\varepsilon_0=1$，对任一实数$\delta>0$，在〔0，1〕上作分划 T：$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$，使得T的直径$\lambda<\delta$。由有理数及无理数的稠密性可知，对正整数k $(1\leqslant k\leqslant n)$，〔$x_{k-1},x_k$〕内必有有理数及无理数，因此$\omega_k=2$，故

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = 2\sum_{k=1}^n \Delta x_k = 2>\varepsilon_0$$

这就证明了 $f(x)$ 于〔0，1〕上的不可积性。

由例 3 可以看出：$|f(x)|=1$，故 $|f(x)|$ 于〔0,1〕是可积的。这说明函数 $f(x)$ 于〔a，b〕不可积，不见得 $|f(x)|$ 于〔a，b〕不可积，或者说，若 $|f(x)|$ 于〔a，b〕可积，$f(x)$ 于〔a，b〕未必可积。

下面考虑复合函数的可积问题。我们知道，若 $f(x)$ 于〔A，B〕连续，$\varphi(x)$ 于〔a，b〕连续，且当 $x\in$〔a，b〕时，$A\leqslant\varphi(x)\leqslant B$，则复合函数 $f(\varphi(x))$ 是〔a，b〕上的连续函数，故 $f(\varphi(x))$ 于〔a，b〕可积。但是，若 $f(x)$ 于〔A，B〕可积，$\varphi(x)$ 于〔a，b〕可积，且当 $x\in$〔a，b〕时，$A\leqslant\varphi(x)\leqslant B$，是否仍有 $f(\varphi(x))$ 于〔a，b〕可积呢？答案是否定的。例如

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

及 $$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\text{为无理数}\\ \dfrac{1}{n} & x=\dfrac{m}{n}\quad (m,\ n\text{互质})\end{cases}$$

则 $f(x)$ 于〔0，1〕可积，$\varphi(x)$ 于〔0，1〕可积，且 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，但

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}1 & x\text{为无理数}\\ 0 & x\text{为有理数}\end{cases}$$

可以证明 $f(\varphi(x))$ 于〔0，1〕不可积。如果将上述条件再适当加强，$f(x)$ 的可积性改为 $f(x)$ 于区间〔A，B〕连续，则可以证得 $f(\varphi(x))$ 于〔a，b〕可积。下面的例 4 将对此给出证明。

例4 设 $f(x)$ 于〔A，B〕连续，$\varphi(x)$ 于〔a，b〕可积，且当 $x\in$〔a，b〕时，$A\leqslant\varphi(x)\leqslant B$，则 $f(\varphi(x))$ 于〔a，b〕可积。

证 由于 $f(x)$ 于〔A，B〕连续，所以一致连续，故对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 x'，$x''\in$〔A，B〕，且 $|x'-x''|<\delta$ 时 $\quad |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

因为 $\varphi(x)$ 于〔a，b〕可积，所以存在 $\eta>0$，对于

〔a, b〕上的任一分划 T，只要 $\lambda<\eta$，则

$$\sum_k \omega_k(\varphi)\,\Delta x_k<\delta\varepsilon$$

将 $\sum\limits_k \omega_k(\varphi)\,\Delta x_k$ 分成两部分：第一部分为 $\sum\limits_k \omega_k(\varphi)\,\Delta x_k$ 中使 $\omega_k(\varphi)\geqslant\delta$ 的各项之和，记为 $\sum\limits_k{}'\omega_k(\varphi)\,\Delta x_k$；第二部分为 $\sum\limits_k \omega_k(\varphi)\,\Delta x_k$ 中使 $\omega_k(\varphi)<\delta$ 的各项之和，记为 $\sum\limits_k{}''\omega_k(\varphi)\,\Delta x_k$，则

$$\delta\sum_k{}'\,\Delta x_k\leqslant\sum_k{}'\omega_k(\varphi)\,\Delta x_k\leqslant\sum_k\omega_k(\varphi)\,\Delta x_k<\delta\varepsilon$$

所以

$$\sum_k{}'\,\Delta x_k<\varepsilon$$

因为 $f(x)$ 于〔A, B〕连续，所以有界，设 $|f(x)|\leqslant M$。则当 $\omega_k(\varphi)\geqslant\delta$ 时，$\omega_k(f(\varphi))\leqslant 2M$；当 $\omega_k(\varphi)<\delta$ 时，$\omega_k(f(\varphi))\leqslant\varepsilon$。所以

$$\begin{aligned}&\sum_k \omega_k(f(\varphi))\,\Delta x_k\\&=\sum_k{}'\omega_k(f(\varphi))\,\Delta x_k+\sum_k{}''\omega_k(f(\varphi))\,\Delta x_k\\&\leqslant 2M\sum_k{}'\,\Delta x_k+\varepsilon\sum_k{}''\,\Delta x_k\\&<2M\cdot\varepsilon+(b-a)\cdot\varepsilon\\&=(2M+b-a)\varepsilon\end{aligned}$$

从而 $f(\varphi(x))$ 于〔a, b〕可积。

下面我们再建立两个函数可积的充要条件，以便以后证明命题时使用。

例5 设 $f(x)$ 于〔a, b〕有界，则 $f(x)$ 于〔a,b〕可积的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$ 与 $\sigma>0$，存在 $\delta>0$，当 $\lambda<\delta$ 时，对应于 $\omega_k\geqslant\varepsilon$ 的那些区间长度之和 $\sum\limits_k{}'\,\Delta x_k<\sigma$。

证　必要性

由于 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 可积，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$ 及 $\sigma>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\lambda<\delta$ 时

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k<\varepsilon\sigma$$

设 $\sum\limits_k \omega_k \Delta x_k$ 中使 $\omega_k\geqslant\varepsilon$ 的各项之和为 $\Sigma' \omega_k \Delta x_k$，由于

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k\geqslant\sum_k{}' \omega_k \Delta x_k\geqslant\varepsilon\sum_k{}' \Delta x_k$$

所以

$$\sum_k{}' \Delta x_k<\sigma$$

充分性

设 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 满足 $|f(x)|\leqslant M$。对任意给定的 $\varepsilon>0$，在分划 T 下，用 $\sum\limits_k{}' \omega_k \Delta x_k$ 表示 $\sum\limits_k \omega_k \Delta x_k$ 中使 $\omega_k\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ 的各项之和，用 $\sum\limits_k{}'' \omega_k \Delta x_k$ 表示 $\sum\limits_k \omega_k \Delta x_k$ 中使 $\omega_k<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ 的各项之和。由已知条件，存在 $\delta>0$，当分划 T 满足 $\lambda<\delta$ 时，使

$$\sum_k{}' \Delta x_k<\frac{\varepsilon}{4M}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_k \omega_k \Delta x_k&=\sum_k{}' \omega_k \Delta x_k+\sum_k{}'' \omega_k \Delta x_k\\&<2M\sum_k{}' \Delta x_k+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_k{}'' \Delta x_k\\&<2M\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 可积。

例6　设 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 有界，则 $f(x)$ 于

〔a,b〕可积的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个分划T，使得在这个分划下满足

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k<\varepsilon。$$

证 必要性显然，下面证充分性。

设对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在分划T_0，使得在分划T_0下

$$\sum \omega_k \Delta x_k<\varepsilon$$

即

$$S(T_0)-s(T_0)<\varepsilon$$

所以

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf_T\{S(T)\}\leqslant S(T_0)<s(T_0)+\varepsilon\leqslant$$

$$\leqslant\sup_T\{s(T)\}+\varepsilon=\underline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon$$

由ε的任意性得

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx\leqslant\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

另一方面，显然有

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx\geqslant\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

所以

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

故$f(x)$于〔a，b〕可积。

练 习 题

1．设

$$D(x)=\begin{cases}0 & x\text{为无理数}\\ 1 & x\text{为有理数}\end{cases}$$

试证 $D(x)$ 于任何闭区间上不可积。

2. 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right] & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

试证 $f(x)$ 于 $[0, 1]$ 可积。

3. 若 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 可积，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在连续函数 $g(x)$，使

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx<\varepsilon。$$

4. 设 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 可积，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，当 $[a_1, b_1]\subseteq[a, b]$，且 $b_1-a_1<\delta$ 时

$$\left|\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx\right|<\varepsilon。$$

5. 设 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 可积，$\inf\{|f(x)|;\ x\in[a, b]\}>0$，试证 $1/f(x)$ 于 $[a, b]$ 可积。

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界，如果对于任意的 $b_1\in(a, b)$，$f(x)$ 于 $[a, b_1]$ 可积，试证 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 可积。

7. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，若 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上仅有有限个点与 $f(x)$ 的值不同，试证 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx。$$

§4.2 定积分的性质

基础理论

1. 设 $f(x)$，$g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上可积，则 $cf(x)$，$f(x)\pm g(x)$ 也都在 $[a, b]$ 上可积，且

$$\int_a^b cf(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

2. 设 $a<c<b$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上都可积。并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)dx$$

3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

4. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 可积，并且 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

5. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积。

6. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是 $[a,b]$ 上的连续函数。

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的点 x 处连续，则 $f(x)$ 在 x 点可导，且

$$F'(x)=f(x)$$

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

8. 设 $f(x)$ 在〔a, b〕上连续，而 $x=\varphi(t)$ 在〔α, β〕上连续可微，$\varphi(t)$ 的值含于〔a, b〕中，并且

$$\varphi(\alpha)=a \qquad \varphi(\beta)=b$$

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

9. 设 $f(x)$ 在〔a, b〕连续，$g(x)$ 在〔a, b〕上连续可微，则对 $f(x)$ 在〔a, b〕上的任一原函数 $F(x)$，

有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b F'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$=F(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

由定积分的定义知，如果 $f(x)$ 在〔a, b〕可积，则对〔a, b〕给以特殊的分划，比如分成 n 等份，在每个小区间上也可以对 ξ_k 给以特殊的取法，比如取 $\xi_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n}$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)$$

显然等式右端是一个数列的极限，因此用这一结论，我们可以利用定积分的值而求出对应的数列的极限值。

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}{n}$。

解 因为

$$\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}{n}$$

$$=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}{n}$$

$$=\lim e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

$$=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}$$

而

$$\int_0^1\ln(1+x)dx=\ln 4-1$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}{n}=e^{\ln 4-1}=\frac{4}{e}$$

例 2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$。

解　首先证明对任意的正整数n，都有

$$2^{1/n}>1+\frac{\ln\ 2}{n}$$

因为当 $x>0$ 时

$$[2^x-(1+x\ln 2)]'=2^x\ln 2-\ln 2>0$$

所以$2^x-(1+x\ln 2)$于$(0,\ +\infty)$严格单调上升，而$x=0$时

$$2^x-(1+x\ln 2)=0$$

从而 $x>0$ 时 $2^x-(1+x\ln 2)>0$，即

$$2^x>1+x\ln 2$$

故对任意的正整数n有

$$2^{1/n}>1+\frac{\ln 2}{n}$$

下面求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$。

因为

$$\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{2^{1/n}}{1+\frac{1}{n}}+\frac{2^{2/n}}{1+\frac{1}{2n}}+\cdots+\frac{2^{n/n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k/n}}{1+\frac{1}{kn}}$$

而当 $k\geqslant 2$ 时，$\ln 2>\frac{1}{k}$，所以$\dfrac{1+\frac{\ln 2}{n}}{1+\frac{1}{kn}}>1$，故

$$\frac{2^{k/n}}{1+\frac{1}{kn}}=2^{(k-1)/n}\cdot\frac{2^{1/n}}{1+\frac{1}{kn}}$$

$$>2^{(k-1)/n}\cdot\frac{1+\frac{\ln 2}{n}}{1+\frac{1}{kn}}>2^{(k-1)/n}$$

又

$$\frac{2^{k/n}}{1+\frac{1}{kn}}<2^{k/n}$$

于是存在$\xi_k\in\left(\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right)$，使

$$\frac{2^{k/n}}{1+\frac{1}{kn}}=2^{\xi_k}$$

令$\xi_1=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k/n}}{1+\frac{1}{kn}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\xi_k}\right)$$

$$=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}$$

利用积分的有关性质，可以证明许多有用的不等式，现举几例说明。

例3 设 $f(x)$ 于 $[a,\ b]$ 连续可微，且 $f(a)=f(b)=0$，试证 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$。

证 设 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$.由于

$$|f(x)|=|f(x)-f(a)|=|f'(\xi_1)|(x-a)\leqslant M(x-a)$$

其中 $\xi_1\in(a,\ x)$

$$|f(x)|=|f(x)-f(b)|=|f'(\xi_2)|(b-x)\leqslant M(b-x)$$

其中 $\xi_2\in(x,b)$

于是

$$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{(b-a)^2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\leqslant\frac{4}{(b-a)^2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}M(x-a)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^bM(b-x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{4}{(b-a)^2}\left(\frac{(b-a)^2}{8}M+\frac{(b-a)^2}{8}M\right)$$

$$=M$$

例4 设 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 有连续导数，且 $0<f'(x)\leqslant1$ 及 $f(a)=0$，试证

$$\left(\int_a^bf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_a^b(f(x))^3\,\mathrm{d}x.$$

证 令 $F(t)=\left(\int_a^tf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2-\int_a^t(f(x))^3\,\mathrm{d}x$

$$G(t)=2\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-(f(t))^2$$

因为$f'(x)>0$，$f(a)=0$，所以当$x>a$时，$f(x)>0$，又

$$F'(t)=2(\int_a^t f(x)\mathrm{d}x)\cdot f(t)-(f(t))^3=G(t)\cdot f(t)$$

$$G'(t)=2f(t)-2f(t)f'(t)=2f(t)(1-f'(t))$$

当$x\in[a,b]$时，$f(x)\geqslant 0$，$0<f'(x)\leqslant 1$，所以当$t\in[a,b]$时，$G'(t)\geqslant 0$，从而$G(t)$单调上升，由于$G(a)=0$，因此当$a\leqslant t\leqslant b$时，$G(t)\geqslant 0$，从而

$$F'(t)=G(t)\cdot f(t)\geqslant 0$$

由于$F(a)=0$，故$F(t)\geqslant 0$，即

$$\left(\int_a^t f(x)dx\right)^2\geqslant\int_a^t f(x))^3\mathrm{d}x$$

特别地，当$t=b$时有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_a^b(f(x))^3dx$$

例 5 〔**许瓦兹（Schwarz）不等式**〕设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上可积，试证

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

证法一 利用若$f(x)$于$[a,b]$可积，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}$$

及不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\beta_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n \beta_k^2\right)$$

因为$f(x)$及$g(x)$于$[a,b]$可积，所以$f(x)\cdot g(x)$于$[a,b]$可积，故

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k)\frac{b-a}{n}\right]^2$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)\cdot\sum_{k=1}^{n} g^2(\xi_k)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)\frac{b-a}{n}\right]$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} g^2(\xi_k)\cdot\frac{b-a}{n}\right]$$

$$=\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$$

其中 $\xi_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n}$.

证法二 因为对任一常数 t 有

$$(tf(x)+g(x))^2\geqslant 0$$

所以

$$\int_a^b[tf(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$=t^2\int_a^b f^2(x)dx+2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

因此上面关于 t 的二次三项式不可能有不同的实根，故

$$\left(2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-4\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$$

即
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

利用许瓦兹不等式，还可得到许多不同类型的不等式，现以例 6，例 7 说明许瓦兹不等式的用法。

例 6 〔闵可夫斯基（Minkowshi）不等式〕 设 $f(x)$，$g(x)$都于〔a，b〕可积，则

$$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}$$
$$\leqslant\left[\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}+\left[\int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

证 因为

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b (f(x)+g(x))(f(x)+g(x))\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x$$

又由许瓦兹不等式得

$$\int_a^b f(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\left[\int_a^b (f(x)^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}\cdot\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}$$

$$\int_a^b g(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left[\int_a^b (g(x))^2 dx\right]^{1/2} \cdot \left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx\right]^{1/2}$$

所以 $\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx$

$$\leqslant\left[\int_a^b (f(x))^2 dx\right]^{1/2} \cdot \left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx\right]^{1/2}$$

$$+\left[\int_a^b (g(x))^2 dx\right]^{1/2} \cdot \left[\int_a^b f(x)+g(x))^2 dx\right]^{1/2}$$

$$=\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx\right]^{1/2}$$

$$\cdot\left\{\left[\int_a^b (f(x))^2 dx\right]^{1/2}+\left[\int_a^b (g(x))^2 dx\right]^{1/2}\right\}$$

从而

$$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx\right]^{1/2}$$

$$\leqslant\left[\int_a^b (f(x)^2 dx\right]^{1/2}+\left[\int_a^b (g(x))^2 dx\right]^{1/2}$$

例 7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，$|f(x)|$ 的最大值为 M，且 $f(a)=0$，试证

$$M^2\leqslant(b-a)\int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

证 因为由许瓦兹不等式，对任意的 $x\in[a,b]$ 都有

$$\left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2=\left(\int_a^x f'(t)\cdot 1dt\right)^2$$

$$\leqslant\int_a^x (f'(t))^2 dt\cdot\int_a^x 1^2 dt$$

$$\leqslant \int_a^b (f'(x))^2 \mathrm{d}x \cdot \int_a^b 1^2 \mathrm{d}x$$

$$=(b-a)\int_a^b (f'(x))^2 \mathrm{d}x$$

而

$$\left(\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2=(f(x)-f(a))^2=f^2(x)$$

所以

$$f^2(x)\leqslant(b-a)\int_a^b (f'(x))^2 \mathrm{d}x$$

上面不等式对一切 $x\in[a, b]$ 成立，所以

$$\max\{f^2(x);\quad x\in[a, b]\}\leqslant(b-a)\int_a^b (f'(x))^2 \mathrm{d}x$$

即

$$M^2\leqslant(b-a)\int_a^b (f'(x))^2 \mathrm{d}x$$

同数列"两头夹定理"的思想类似，要证明 $\lim f(x)=A$ ($f(x)$可能含有积分或微分符号)，只要能证明 $\lim f(x)\leqslant A$ 及 $\lim f(x)\geqslant A$ 同时成立即可。在证明过程中可以将 $f(x)$ 适当放大或缩小，使放大或缩小量始终保持是一个无穷小量。

例 8 设$f(x)$在$[a, b]$连续，试证

$$\lim_{P\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^P \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{P}}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|。$$

证 因为$f(x)$在$[a, b]$连续，所以存在$x_0\in[a, b]$，使

$$|f(x_0)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$$

设 $|f(x_0)|=M$，下面分两种情形证明。

（1） 当$M=0$时，显然命题成立。

（2） 当$M>0$时，显然

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b M^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$=M(b-a)^{1/p} \to M \quad (p \to +\infty) \qquad (4.2.1)$$

另一方面，由于$|f(x)|$连续，$|f(x_0)|=M$，所以对任意给定的$\varepsilon>0$（设$\varepsilon<M$），存在$\delta>0$，当$x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$且$x\in[a, b]$时

$$|f(x)|>M-\varepsilon$$

不妨设$(x_0, x_0+\delta)\subseteq[a, b]$，则

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \geqslant \left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$\geqslant (M-\varepsilon)\delta^{1/p} \to M-\varepsilon \quad (p \to +\infty) \qquad (4.2.2)$$

由式(4.2.1)及(4.2.2)知，存在$p_0>0$，使当$p>p_0$时

$$M-2\varepsilon<\left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}<M+\varepsilon$$

则
$$\left|\left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}-M\right|<2\varepsilon$$

故
$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}=M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$$

例9 设$f(x)$在$(0, +\infty)$上单调增加，对于任何$T>0$，$f(x)$在$[0, T]$上可积，试证$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$的充要条件

是 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=c.$$

证　必要性

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c$，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$x_0>0$，使得当$x>x_0$时

$$c-\varepsilon<f(x)<c+\varepsilon$$

所以
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^{x_0}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$<\frac{1}{x}\int_0^{x_0}f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_{x_0}^x(c+\varepsilon)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^{x_0}f(t)\mathrm{d}t+(c+\varepsilon)\left(1-\frac{x_0}{x}\right)$$

$$\to c+\varepsilon\quad(x\to+\infty)$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t>\frac{1}{x}\int_0^{x_0}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_{x_0}^x(c-\varepsilon)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^{x_0}f(t)\mathrm{d}t+(c-\varepsilon)\left(1-\frac{x_0}{x}\right)$$

$$\to c-\varepsilon\ (x\to+\infty)$$

故存在 $x_1>x_0$，使得当$x>x_1$时

$$c-2\varepsilon<\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<c+2\varepsilon$$

即
$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-c\right|<2\varepsilon$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=c$$

充分性

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=c$，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$A>0$，使得当$x>A$时

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-c\right|<\varepsilon \tag{4.2.3}$$

由于$f(x)$单调增加，因此

$$\frac{2}{x}\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \tag{4.2.4}$$

而当$x>2A$时，由式(4.2.3)得

$$\left|\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t-c\right|$$

$$=\left|2\left(\frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(t)dt-c\right)-\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-c\right)\right|$$

$$\leqslant 2\left|\frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t-c\right|+\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-c\right|$$

$$<2\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

$$\left|\frac{2}{x}\int_{x/2}^x f(t)dt-c\right|$$

$$=\left|2\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-c\right)-\left(\frac{1}{x/2}\int_0^{x/2} f(t)\mathrm{d}t-c\right)\right|$$

$$\leqslant 2\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-c\right|+\left|\frac{1}{x/2}\int_0^{x/2} f(t)\mathrm{d}t-c\right|$$

$$<2\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t=c$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}\int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t=c$$

从而由式(.4.2.4)得$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c$。

例10 设$f(x)$及$g(x)$都是以T为周期的连续函数，试证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^T g(x)\mathrm{d}x。$$

证 显然$f(x)$一致连续，故对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x-y|<\delta$时

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

取充分大的正整数N，使得$n>N$时，$T/n<\delta$，故当$|x-y|\leqslant T/n$时有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \tag{4.2.5}$$

因为

$$\int_0^T f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T} f(x)g(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T} f\left(\frac{k}{n}T\right)g(nx)\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}T\right)\right]g(nx)\mathrm{d}x$$

而

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T} f\left(\frac{k}{n}T\right)g(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}T\right)\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T} g(nx)\mathrm{d}x$$

令 $t=nx$，则

$$\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T} g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{kT}^{(k+1)T} g(t)\mathrm{d}t$$

由于$g(x)$以T为周期，故

$$\int_{kT}^{(k+1)T} g(t)\mathrm{d}t=\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T} g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$$

又

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}T\right)=\frac{n}{T}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{T}{n}f\left(\frac{k}{n}T\right)$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{T}{n}f\left(\frac{k}{n}T\right)=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T} f\left(\frac{k}{n}T\right)g(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{T}\cdot\frac{T}{n}f\left(\frac{k}{n}T\right)\right]\cdot\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$$

又当 $n>N$ 时，由式(4.2.5)得

$$\left|\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}T\right)\right]g(nx)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}T\right)\right|\cdot|g(nx)|\mathrm{d}x$$

$$<\varepsilon\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T}|g(nx)|\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\varepsilon}{n}\int_{kT}^{(k+1)T}|g(t)|\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\varepsilon}{n}\int_0^T|g(x)|\mathrm{d}x$$

故

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}T\right)\right]g(nx)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{n}\int_0^T|g(x)|dx=\varepsilon\int_0^T|g(x)|\mathrm{d}x$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}T\right)\right]g(nx)\mathrm{d}x=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)dx=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx\cdot\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$$

如果$f(x)$是连续函数，则$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$是可微函数，且$F'(x)=f(x)$。这一结论将微分与积分之间建立起了密切的联系。利用这一联系可以将关于积分的命题证明利用微分理论而得以证明。反之也可以将关于微分的命题证明通过积分的性质而得以论证。

例11 设$f(x)$于$[0,+\infty)$连续可微，并且满足下列条件：

（1）$|f'(x)|\leqslant c/x$（c为大于零的常数），对于一切$x\in(0,+\infty)$成立；

（2）$\dfrac{1}{R}\int_0^R |f(x)|\,\mathrm{d}x\to 0 \quad (R\to+\infty)$

试证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

证 假设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$不成立，则存在$\varepsilon_0>0$，使得对于任意的$A>0$，存在$x_0>A$，使$|f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$。由于

$\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{1}{R}\int_0^R |f(x)|\,dx=0$，所以对$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon_0^{\,2}}{2(2c+\varepsilon_0)}>0$，存在$R_0>0$，当$R>R_0$时

$$\frac{1}{R}\int_0^R |f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon_1 \tag{4.2.6}$$

取$x_0>R_0$且使$|f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$，令$x_1=\left(1+\dfrac{|f(x_0)|}{2c}\right)x_0$，则$x_1>x_0$，且当$x\in(x_0,x_1)$时，由

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t$$

得
$$|f(x)|\geqslant|f(x_0)|-\int_{x_0}^{x} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\geqslant |f(x_0)| - \int_{x_0}^{x_1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\geqslant |f(x_0)| - \int_{x_0}^{x_1} \frac{c}{t}\mathrm{d}t$$

$$> |f(x_0)| - \frac{c}{x_0}(x_1 - x_0)$$

$$= |f(x_0)| - \frac{1}{2}|f(x_0)| = \frac{1}{2}\left| f(x_0) \right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$$

因此

$$\frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} |f(x)|\,dx \geqslant \frac{1}{x_1}\int_{x_0}^{x_1} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$> \frac{\varepsilon_0}{2}\ \frac{x_1 - x_0}{x_1}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(1 - \frac{2c}{2c + |f(x_0)|}\right)$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}\left(1 - \frac{2c}{2c + \varepsilon_0}\right) = \varepsilon_1$$

这与式（4.2.6）矛盾，故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$。

例12 设$f(x)$于$(-\infty, +\infty)$二次连续可微，$|f(x)| \leqslant M$，且存在一点x_0，使$(f(x_0))^2 + (f'(x_0))^2 > 1 + M^2$，试证存在$\xi$，使 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$。

证 因为$(f(x_0))^2 + (f'(x_0))^2 > 1 + M^2$，$|f(x)| \leqslant M$，

所以 $$|f'(x_0)| > \sqrt{1 + M^2 - (f(x_0))^2} \geqslant 1$$

故$f'(x_0) > 1$或$f'(x_0) < -1$。

要证明存在ξ，使$f(\xi) + f''(\xi) = 0$，由$f(x)$及$f''(x)$的连续性知，只要证明存在x^*，x^{**}，使$f(x^*) + f''(x^*) \geqslant 0$及

$f(x^{**})+f''(x^{**})\leqslant 0$ 即可。下面用反证法证明这一结论成立。

假设对任意的 x，恒有$f(x)+f''(x)>0$或恒有$f(x)+f''(x)<0$。如果$f'(x_0)>1$，且对任意的x，恒有$f(x)+f''(x)>0$，则可以证明，当$x>x_0$时，$f'(x)\geqslant 1$。事实上，若存在$x_1>x_0$，使$f'(x_1)<1$，令$x_2=\inf\{x;f(x)<1,且x>x_0\}$，由$f'(x)$的连续性及$f'(x_0)>1$知，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in[x_0, x_0+\delta]$时，$f'(x)\geqslant 1$，故$x_2\geqslant x_0+\delta$。由于当 $x_0\leqslant x\leqslant x_2$时

$$f'(x)\geqslant 1 \tag{4.2.7}$$

且 $f(x)+f''(x)>0$，所以

$$\begin{aligned}(f(x_2))^2+(f'(x_2))^2 &= 2\int_{x_0}^{x_2} f'(x)[f(x)+f''(x)]\mathrm{d}x \\ &\quad +(f(x_0))^2+(f'(x_0))^2 \\ &\geqslant (f(x_0))^2+(f'(x_0))^2>1+M^2\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

因为 $|f(x_2)|\leqslant M$，所以由式(4.2.8)得$(f'(x_2))^2>1$，故

$$|f'(x_2)|>1$$

因此由式(4.2.7)得

$$f'(x_2)>1$$

由于$f'(x)$连续，所以存在 $\eta>0$，当 $x\in[x_2, x_2+\eta]$时，$f'(x)>1$，而这与x_2的定义矛盾，从而当$x>x_0$时，$f'(x)\geqslant 1$必定成立。

由拉格朗日定理，当$x>x_0$时，存在$\xi\in(x_0, x)$，使

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\geqslant x-x_0$$

从而$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，这与$|f(x)|\leqslant M$矛盾。这说明$f'(x_0)$

>1时，对任意的x，恒有$f(x)+f''(x)>0$是不可能的。

同理可证：当$f'(x_0)>1$时，对任意的x，恒有$f(x)+f''(x)<0$，或当$f'(x_0)<-1$时，对任意的x，恒有$f(x)+f''(x)>0$及当$f'(x_0)<-1$时，对任意的x，恒有$f(x)+f''(x)<0$都是不可能的。

故必存在x^*和x^{**}，使$f(x^*)+f'(x^*)\geqslant 0$，且$f(x^{**})+f''(x^{**})\leqslant 0$。从而由$f(x)+f''(x)$的连续性知，存在$\xi$，使$f(\xi)+f''(\xi)=0$。

下面例 13 我们证明在积分的命题证明中经常用到的一个结论。

例13 设$f(x)$于$[a, b]$可积，$f(x)\geqslant 0$，试证$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$的充要条件是$f(x)$在$[a, b]$的一切连续点有$f(x)=0$。

证 必要性

假设$f(x)$有一个连续点$x_0\in[a, b]$，但$f(x_0)\neq 0$，则由$f(x)\geqslant 0$知，必有$f(x_0)>0$，因此存在$\delta>0$，使得当

$$x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap[a, b]\text{时，}\qquad f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$$

不妨设$(x_0, x_0+\delta)\subseteq[a, b]$，则

$$\int_a^b f(x)dx\geqslant\int_{x_0}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\delta}{2}f(x_0)>0$$

这与$\int_a^b f(x)dx=0$矛盾。故$f(x)$在$[a, b]$的一切连续点都有$f(x)=0$。

充分性

首先证明：如果$f(x)$于$[a, b]$可积，则$f(x)$的连续点在$[a, b]$处处稠。

假设 $f(x)$ 的连续点于 $[a, b]$ 不是处处稠的，则存在 $[\alpha, \beta]\subseteq[a, b]$，使得 $[\alpha, \beta]$ 中无 $f(x)$ 的连续点，由§2.2例6知，对任意的 $x\in[\alpha, \beta]$，都有 $\omega_x>0$，且对任意的 $\delta>0$，$\omega_x(\delta)\geqslant\omega_x$。

由于对任意的 $\delta>0$，都有 $\{(y-\frac{\delta}{2}, y+\frac{\delta}{2}):$ $y\in[\alpha, \beta]\}$ 覆盖 $[\alpha, \beta]$，由有限覆盖定理知，存在有限个开区间仍覆盖 $[\alpha, \beta]$。设这有限个开区间为 $(y_1-\frac{\delta}{2}, y_1+\frac{\delta}{2})$，$(y_2-\frac{\delta}{2}, y_2+\frac{\delta}{2})$，…，$(y_n-\frac{\delta}{2}, y_n+\frac{\delta}{2})$，

并设 $y_1<y_2<\cdots<y_n$，令

$$\varepsilon_0=\min\{\omega y_1, \omega y_2, \cdots, \omega y_n\}$$

取 $x_0=\alpha$，$x_k=\frac{y_k+y_{k+1}}{2}$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$，$x_n=\beta$，则 $\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_n=\beta$，为 $[\alpha, \beta]$ 上的一个分划，且 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta x_k\}<\delta$，但

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\ \Delta x_k\geqslant\varepsilon_0(\beta-\alpha)$$

由 δ 的任意性知，$f(x)$ 于 $[\alpha, \beta]$ 不可积，这与 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 可积矛盾。故 $f(x)$ 的连续点于 $[a, b]$ 处处稠。

由于 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 可积，所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_k f(\xi_k)\ \Delta x_k\ .$$

取 ξ_k 为 $[x_{k-1}, x_k]$ 中使 $f(x)$ 连续的点，则 $f(\xi_k)=0$，故

$$\sum_k f(\xi_k)\ \Delta x_k=0$$

因此 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$。

由例13可以看出，如果 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 连续，且 $f(x)\geqslant$

0（或$f(x)\leqslant 0$），但 $f(x)\not\equiv 0$，则必有

$$\int_a^b f(x)dx>0 \text{（或}\int_a^b f(x)dx<0\text{）} \qquad (4.2.9)$$

利用这一结论可以证明下面例14、例15、例16等三个命题。

例14 设$f(x)$于$[0,\pi]$连续，且

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx=\int_0^\pi f(x)\cos x\, dx=0$$

试证在$(0,\pi)$内至少存在两点α，β，使得$f(\alpha)=f(\beta)=0$。

证 令$F(t)=\int_0^t f(x)\sin x dx \quad (0\leqslant t\leqslant\pi)$，则$F(t)$于$[0,\pi]$连续，于$(0,\pi)$可导，且$F(0)=F(\pi)=0$。所以由罗尔定理，存在$\alpha\in(0,\pi)$，使

$$F'(\alpha)=0$$

由于$F'(t)=f(t)\sin t$，所以$f(\alpha)\sin\alpha=0$。又由$\alpha\in(0,\pi)$，所以$\sin\alpha\neq 0$，故

$$f(\alpha)=0$$

下面证明又有$\beta\in(0,\pi)$，$\beta\neq\alpha$，使$f(\beta)=0$。

假设$f(x)$于$(0,\pi)$内只有一个零点α，则$f(x)$于$(0,\alpha)$及(α,π)两个区间内符号必相反，否则不可能有$\int_0^\pi f(x)\sin x dx=0$。而$\sin(x-\alpha)$在$(0,\alpha)$及$(\alpha,\pi)$内显然符号也相反，故$f(x)\sin(x-\alpha)$于这两个区间内符号相同。又$f(x)\sin(x-\alpha)$于$[0,\pi]$连续，因此由式(4.2.9)知

$$\int_0^\pi f(x)\sin\alpha(x-\alpha)dx\neq 0 \qquad (4.2.10)$$

另一方面，由于

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\, dx=\int_0^\pi f(x)\cos x\, dx=0$$

所以

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-\alpha)\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)[\sin x\cos\alpha-\cos x\sin\alpha]\mathrm{d}x$$

$$=\cos\alpha\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x-\sin\alpha\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x$$

$$=0$$

这与式（4.2.10）矛盾。从而$f(x)$于$(0,\pi)$内除α之外，必另有一零点β。

例15 设$f(x)$于$[a,b]$连续，且对于一切不大于正整数N的非负整数n，都有$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x=0$，试证$f(x)$在$(a,b)$内至少有$N+1$个零点。

证 如果$f(x)\equiv 0$，则结论显然成立。

如果$f(x)\not\equiv 0$，则可以证明，至少存在$N+1$个点x_1，x_2，…，$x_{N+1}\in(a,b)$，$x_1<x_2<\cdots<x_{N+1}$，使得$f(x)$在$x_k(k=1,2,\cdots,N+1)$的左、右邻域内符号相反。事实上，假设这样的点只有m个，$m\leqslant N$，不妨设$x\in(a,x_1)$时，$f(x)\geqslant 0$，$x\in(x_1,x_2)$时，$f(x)\leqslant 0$，依此类推。

令 $p(x)=(x_1-x)\cdot(x_2-x)\cdot\cdots\cdot(x_m-x)$

则当$x\in(a,b)$时，$f(x)p(x)\geqslant 0$，且$f(x)p(x)\not\equiv 0$，于是由$f(x)p(x)$的连续性及式（4.2.9）得

$$\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x>0 \qquad (4.2.11)$$

另一方面，由于$p(x)$是x的m次多项式，且$m\leqslant N$，所以由题设条件得

$$\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x=0$$

这与式（4.2.11）矛盾。因此至少存在$N+1$个点x_1，x_2，

…，x_{N+1}属于（a，b），使得$f(x)$在x_k（$k=1$，2，…，$N+1$）的左、右邻域内符号相反。故由$f(x)$的连续性知

$$f(x_k)=0 \qquad (k=1, 2, \cdots, N+1)$$

于是$f(x)$在（a，b）内至少有$N+1$个零点。

例16 设$f(x)$于〔a，b〕连续，且对任意的非负整数n，$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x=0$，试证在〔$a$，$b$〕上$f(x)\equiv 0$。

证 由于对任意的非负整数n，都有$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x=0$，所以对任意的多项式$p(x)$，必有

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x=0$$

由多项式逼近定理知，对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在多项式$p(x)$，使得对于所有的$x\in$〔a，b〕，有

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon$$

由于$f(x)$于〔a，b〕连续，所以存在$M>0$，使得对一切$x\in$〔a，b〕，都有$|f(x)|\leqslant M$，故

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)[f(x)-p(x)]\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x)|\ |f(x)-p(x)|\ \mathrm{d}x$$

$$\leqslant M(b-a)\varepsilon$$

故由ε的任意性得 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$

由于$f^2(x)$于〔a，b〕连续，因此由式〔4.2.9〕知$f^2(x)\equiv 0$，从而$f(x)\equiv 0$。

练 习 题

1. 用定积分求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>0)$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

2. 设$f(x)$在$[-a,\ a](a>0)$上连续，试证：

(1) 若$f(x)$是偶函数，则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x;$$

(2)若$f(x)$是奇函数，则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0。$$

3. 设$f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$定义的以T为周期的连续函数，试证$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$（$a$为任意实数）。

4. 设$f(x)$在$[a,\ b]$上可积，试证

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$　　　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0$。

5. 设$f(x)$于$[a,\ b]$可积，$f(x)\geqslant 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，试证存在闭区间$[\alpha,\beta]\subseteq[a,\ b]$，使得当$x\in[\alpha,\ \beta]$时$f(x)>0$。

6. 求下列极限：

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\int_0^x e^{t^2}dt\right]^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt};$$

$$(2)\quad \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}。$$

7. 若 $f(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的正的连续函数，试证函数

$$g(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

在 $x>0$ 时是单增的。

8. 试证 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0$。

9. 设 $f(x)$ 于 $[0, 1)$ 上单调减少，试证对于任何 $\alpha\in(0, 1)$，有 $\int_0^\alpha f(x)dx\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)dx$。

提示：$\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 f(x)dx\leqslant f(\alpha)\leqslant\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)dx$。

10. 设 $f(x)$ 是 $(0, 1)$ 中的连续函数，$\sqrt{x}f(x)$ 是 $(0, 1)$ 中的有界函数，对 $(0, 1)$ 中一切 x，定义

$$g(x)=\int_{1/2}^x f(t)dt$$

试证 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 中一致连续。

11. 设 $f(x)$ 于 $[a, +\infty)$ 一致连续，$F(x)=\int_6^a f(t)dt$，若 $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ 存在，则 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$。

12. 设 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 内单调递减的连续函数，$f(x)>0$，若

$$a_n=\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)dx$$

试证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。

§4.3 积分中值定理

基础理论

1. **第一中值定理**

若 $f(x)$, $g(x)$ 于 $[a, b]$ 有界可积, $g(x)$ 不变号, 则存在实数 μ ($\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}\leqslant\mu\leqslant\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$), 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

特别地

(1) 若 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 连续, 则存在 $\xi\in[a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

(2) 若 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 连续, $g(x)\equiv 1$, 则存在 $\xi\in[a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

2. **第二中值定理**

若 $f(x)$, $g(x)$ 于 $[a, b]$ 有界可积, $g(x)$ 单调, 则存在 $\xi\in[a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a+0)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

$$+g(b-0)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

特别地

（1） 若 $g(x)$ 非负单减，则存在 $\xi\in[a, b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a+0)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

（2） 若 $g(x)$ 非负单增，则存在 $\xi\in[a, b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b-0)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

在第一中值定理中 $f(x)$ 连续的条件下，实际上我们可以得到更好的结论，就是说，定理中所得到的 $\xi\in[a, b]$ 可改为 $\xi\in(a, b)$，下面的例 1 给出其证明。

例 1 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号，且在 $[a, b]$ 上可积，则存在 $\xi\in(a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x。$$

证 不妨设 $g(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$。因为 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 连续，所以存在 x_1，$x_2\in[a, b]$，使

$f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$，其中 m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值。

由于 $g(x)\geqslant 0$，所以

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$$

故

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \tag{4.3.1}$$

（1） 当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$ 时，则

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$$

所以由式（4.3.1）得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$$

因此对任意的 $\xi\in(a,\ b)$，都有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

（2）　当$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$时，由式(4.3.1)得

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M$$

若

$$m < \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} < M$$

则

$$f(x_1) < \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} < f(x_2)$$

由于 $f(x)$ 于$[a,b]$连续，故由介值定理知，存在 ξ 位于x_1，x_2之间，使

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

由于$\xi \neq x_1$，x_2，因此ξ属于以x_1，x_2为端点的开区间内，故$\xi \in (a, b)$，因此命题结论成立。

若

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = M = f(x_2) \tag{4.3.2}$$

则当$x_2 \in (a, b)$时，只要取$\xi = x_2$，则有

$$f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

因此命题结论也成立。

当$x_2 = a$或$x_2 = b$时，可以证明必存在$\xi \in (a, b)$，使$f(\xi) = M$。事实上，假设对一切$x \in (a, b)$，都有$f(x) < M$，取充分小的$\varepsilon > 0$，使$a + \varepsilon < b - \varepsilon$，令$M^*$为$f(x)$在$[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$上的最大值，则$M^* < M$，所以

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^{a+\varepsilon} f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_{b-\varepsilon}^{b} f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant M\int_a^{a+\varepsilon} g(x)\mathrm{d}x + M^*\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\mathrm{d}x + M\int_{b-\varepsilon}^{b} g(x)\mathrm{d}x \\
&< M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

故

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} < M$$

这与式（4.3.2）矛盾。说明必存在$\xi \in (a, b)$，使$f(\xi) =$

M。从而

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

同理可证，当

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=m$$

时，必有 $\xi\in(a,b)$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

因此不论哪种情况，命题的结论都是正确的。

特别地，当 $g(x)\equiv 1$ 时，则有如下的第一中值定理：设 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 连续，则存在 $\xi\in(a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

当积分的被积函数 $f(x)$ 是连续函续时，通过拉格朗日定理直接证明第一中值定理成立也是十分容易的。事实上，令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

则

$$F(a)=0 \qquad F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 连续，所以 $F(x)$ 于 $[a, b]$ 连续，于 (a, b) 可导，且 $F'(x)=f(x)$。由拉格朗日定理知，存在 $\xi\in(a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a)$$

于是命题得证。

反之，如果在满足 $f'(x)$ 于 $[a, b]$ 连续的条件下，我

们又可以通过第一中值定理来证明拉格朗日定理成立。事实上，因为$f'(x)$于$[a, b]$连续，所以由第一中值定理知，存在$\xi\in(a, b)$，使

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f'(\xi)(b-a)$$

另一方面由于 $$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$$

所以

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

即 $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

于是拉格朗日定理得证。

通过上面的证明可以看出，第一中值定理与拉格朗日定理（或罗尔定理）之间存在着密切的联系。正因为如此，许多命题的证明既可以用积分中值定理来证明，又可以用拉格朗日定理或罗尔定理来证明。下面观察几个例子。

例2 设$f(x)$在$[a, b]$上连续，$x_0\in(a, b)$，试证

$$\lim_{n\to\infty}\int_{nx_0}^{nx_0+1} f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x=f(x_0).$$

证法一 对积分 $\int_{nx_0}^{nx_0+1} f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x$ 作变换 $t=\frac{x}{n}$，

则 $$\int_{nx_0}^{nx_0+1} f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x=n\int_{x_0}^{x_0+1/n} f(t)\mathrm{d}t$$

由第一中值定理知，存在$\xi_n\in\left[x_0, x_0+\frac{1}{n}\right]$，使

$$\int_{x_0}^{x_0+1/n} f(t)\mathrm{d}t = f(\xi_n)\cdot\frac{1}{n}$$

所以

$$\int_{nx_0}^{nx_0+1} f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x = n\cdot f(\xi_n)\cdot\frac{1}{n} = f(\xi_n)$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_0+\frac{1}{n}\right)=x_0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=x_0$，故由 $f(x)$ 的连续性

得
$$\lim_{n\to\infty}\int_{nx_0}^{nx_0+1} f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(x_0)$$

证法二 取充分大的 n，使 $x_0+\frac{1}{n}\leqslant b$，令

$$F(x)=\int_{na}^{x} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t \quad (na\leqslant x\leqslant nb)$$

则

$$\int_{nx_0}^{nx_0+1} f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x = F(nx_0+1)-F(nx_0)$$

由拉格朗日定理知，存在 $\xi_n\in(nx_0,\ nx_0+1)$，使

$$F(nx_0+1)-F(nx_0)=F'(\xi_n)=f\left(\frac{\xi_n}{n}\right)$$

由于 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi_n}{n}=x_0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{nx_0}^{nx_0+1} f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{\xi_n}{n}\right) = f(x_0)$$

例3 设实数 a_0，a_1，…，a_n 满足条件

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

试证 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 至少有一个实根。

证法一 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.

则
$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

故由第一中值定理，存在 $\xi\in[0,1]$，使得
$$f(\xi)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$$
因此 $f(x)$ 有实数根 ξ。

证法二 设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_kx^{k+1}}{k+1}$

则 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，从而由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，即
$$a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\cdots+a_n\xi^n=0$$
故 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 有实根。

例4 设 $f(x)$ 于 $[0,1]$ 可导，且当 $x\in(0,1)$ 时，$|f'(x)|\leqslant M$，试证
$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n}。$$

证法一 因为
$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$
$$=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x$$

又由于 $f(x)$ 于〔0，1〕可导，故当 $x\in\left[\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right]$ 时，由拉格朗日定理知，存在 $\xi_k\in\left(x,\ \frac{k}{n}\right)$，使

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=\left|f'(\xi_k)\right|\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\frac{M}{n}$$

从而

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{M}{n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{M}{n}$$

证法二 因为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x$$

由第一中值定理，存在 $\zeta_k\in\left(\frac{k-1}{k},\ \frac{k}{n}\right)$，使

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x=f(\zeta_k)\cdot\frac{1}{n}$$

所以

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)$$

又由拉格朗日定理，存在 $\eta_k\in\left(\zeta_k,\ \frac{k}{n}\right)$，使

$$\left|f(\zeta_k)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=\left|f'(\eta_k)\right|\left|\frac{k}{n}-\zeta_k\right|\leqslant\frac{M}{n}$$

故

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left[f(\zeta_k)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|f(\zeta_k)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{M}{n}=\frac{M}{n}$$

有些命题的证明不仅可以用积分中值定理及拉格朗日定理，还可以由所给出的条件用其它方法进行证明。

例5 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，且对任何区间 $[\alpha, \beta]$ $(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$ 成立不等式

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M(\beta-\alpha)^{1+\delta}\quad(M,\ \delta\text{为正的常数})$$

试证在 $[a, b]$ 上，$f(x)\equiv 0$。

证法一 设 $x\in[a, b)$，$\varepsilon_n>0$ $(n=1, 2, \cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 且 $x+\varepsilon_n<b$ $(n=1, 2, \cdots)$，则

$$\left|\int_{x}^{x+\varepsilon_n}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\varepsilon_n^{1+\delta}$$

由第一中值定理，存在 $x_n\in[x, x+\varepsilon_n]$，使

$$\int_{x}^{x+\varepsilon_n}f(x)\mathrm{d}x=f(x_n)\cdot\varepsilon_n$$

因此 $$|f(x_n)|\leqslant M\varepsilon_n^{\delta}$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0$$

由于 $\varepsilon_n\to 0$ $(n\to\infty)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，故由 $f(x)$ 的连续性得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0$$

于是在$(a,\ b)$上$f(x)\equiv 0$，再由$f(x)$在$x=b$点的连续性得$f(b)=0$，从而在$[a,b]$上，$f(x)\equiv 0$。

证法二 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

则对任意的$x\in[a,b]$，且取Δx使$x+\Delta x\in[a,b]$，有

$$|F(x+\Delta x)-F(x)|=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant M|\Delta x|^{1+\delta}$$

所以

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\right|\leqslant M|\Delta x|^{\delta} \qquad (4.3.3)$$

由于$f(x)$于$[a,b]$连续，所以由拉格朗日定理，存在ξ位于x，$x+\Delta x$之间，使

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\right|=|F'(\xi)|=|f(\xi)| \qquad (4.3.4)$$

由式(4.3.3)及(4.3.4)得

$$|f(\xi)|\leqslant M|\Delta x|^{\delta}$$

因为$f(x)$连续，且当$\Delta x\to 0$时，$\xi\to x$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x)$$

从而由不等式$|f(\xi)|\leqslant M|\Delta x|^{\delta}$，令$\Delta x\to 0$得

$$|f(x)|=0$$

故在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$。

证法三 （用反证法）

假设存在$x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)\neq 0$，不妨设$f(x_0)>0$，由$f(x)$在x_0点的连续性知，存在$\eta>0$，当$x\in[a,b]$，且$|x-x_0|<\eta$时

$$f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$$

因此对任意给定的 $\varepsilon>0$（设 $\varepsilon<\eta$），不妨设〔$x_0-\varepsilon$，x_0〕$\subseteq$〔a，b〕，则

$$\left|\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x\right| \geqslant \frac{1}{2}|f(x_0)|\varepsilon$$

又由已知条件

$$\left|\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\varepsilon^{1+\delta}$$

所以 $$|f(x_0)| \leqslant 2M\varepsilon^{\delta}$$

故由 ε 的任意性得 $f(x_0)=0$，这与 $f(x_0)>0$ 的假设矛盾．于是当 $x\in$〔a，b〕时，$f(x)\equiv 0$。

最后再举一个在证明过程中多次用到前面已得出的结论的例子。

例 6 设 $f(x)$，$g(x)$ 都在〔a，b〕连续，$f(x)$ 不恒为零，$g(x)\geqslant m>0$（m 为常数），令 $d_n=\int_a^b |f(x)|^n g(x)\mathrm{d}x$ （$n=1$，2，…），试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{d_{n+1}}{d_n}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$。

证 显然由已知条件知 $d_n>0$ （$n=1$，2，…），因为

$$d_n^2=\left[\int_a^b |f(x)|^n g(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

$$=\left[\int_a^b (|f(x)|^{n+1}g(x))^{1/2}\cdot(|f(x)|^{n-1}g(x))^{1/2}\mathrm{d}x\right]^2$$

由许瓦兹不等式得

$$\left[\int_a^b (|f(x)|^{n+1}g(x))^{1/2}\cdot(|f(x)|^{n-1}g(x))^{1/2}\mathrm{d}x\right]^2$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x)|^{n+1}g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b |f(x)|^{n-1}g(x)\mathrm{d}x$$

$$=d_{n+1}d_{n-1}$$

所以
$$\frac{d_{n+1}}{d_n}\Big/\frac{d_n}{d_{n-1}}=\frac{d_{n+1}d_{n-1}}{d_n^2}\geqslant 1$$

故数列 $\left\{\frac{d_{n+1}}{d_n}\right\}$是单增的。又

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{\int_a^b |f(x)|^{n+1}g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b |f(x)|^n g(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\int_a^b |f(x)|\ |f(x)|^n g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b |f(x)|^n g(x)\mathrm{d}x}$$

由第一中值定理，存在 $\zeta\in(a,\ b)$，使

$$\int_a^b |f(x)|\ |f(x)|^n g(x)\mathrm{d}x=|f(\zeta)|\ \int_a^b |f(x)|^n g(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{|f(\zeta)|\int_a^b |f(x)|^n g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b |f(x)|^n g(x)\mathrm{d}x}$$

$$=|f(\zeta)|\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \tag{4.3.5}$$

故$\left\{\frac{d_{n+1}}{d_n}\right\}$有界。由数列极限存在定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}$存在且有限。

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}$ 存在且有限，所以由 §1.1 例 3 知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{d_n}$存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}.$$

由于 $|f(x)|$ 于〔a，b〕连续，所以存在 $x_0\in$〔a，b〕，使得

$$|f(x_0)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$$

故对任意给定的 $\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<|f(x_0)|$），存在 $\delta>0$，使得当 $x\in$〔a，b〕，且 $x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta$ 时

$$|f(x)|>|f(x_0)|-\varepsilon$$

不妨设 $[x_0,\ x_0+\delta]\subseteq$〔$a$，$b$〕，从而

$$\sqrt[n]{d_n}=\left(\int_a^b |f(x)|^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}$$

$$\geqslant\left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} |f(x)|^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}$$

$$\geqslant(|f(x_0)|-\varepsilon)\left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} g(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{d_n}\geqslant\lim_{n\to\infty}(|f(x_0)|-\varepsilon)\left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} g(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}$$

$$=|f(x_0)|-\varepsilon$$

由 ε 的任意性得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{d_n}\geqslant|f(x_0)|$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}\geqslant|f(x_0)| \tag{4.3.6}$$

另一方面，显然由式(4.3.5)得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}\leqslant|f(x_0)| \tag{4.3.7}$$

故由式(4.3.6)及(4.3.7)得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=|f(x_0)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$$

练 习 题

1. 试证下列等式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0 \quad (p>0)$。

2. 设 $a<0<b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，试证

$$\lim_{h\to 0+}\int_a^b \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\pi f(0)。$$

提示：$\lim\limits_{h\to 0+}\int_a^{-h^{1/4}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx$

$$=\lim_{h\to 0+}\int_{h^{1/4}}^b \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=0$$

$$\lim_{h\to 0+}\int_{-h^{1/4}}^{h^{1/4}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\pi f(0)。$$

3. 设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 连续，试证存在$\xi\in(a,b)$使得

$$f(\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)}{n}。$$

4. 设$f(x)$于$[a,b]$满足$m\leqslant f(x)\leqslant M$，$g(x)$于$[a,b]$可积且不变号，$f(x)\cdot g(x)$于$[a,b]$可积，则存在实数$\mu$，$m\leqslant\mu\leqslant M$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx。$$

5. 如果在$[a,b]$上$f(x)$单减且非负，而$g(x)$可积，则存在$\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a+0)\int_a^{\xi}g(x)dx$。

6. 如果在$[a,b]$上$f(x)$单减，而$g(x)$可积，则存在$\xi\in[a,b]$，

使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a+0)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x + f(b-0)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x。$$

§4.4 广义积分

基础理论

1. 设 $f(x)$ 于 $[a,+\infty)$ 有定义，并且对于任何 $u>a$，$f(x)$ 都在 $[a,u]$ 上可积，如果

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x = A \quad (A\text{有限})$$

则称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的，并且定义它的值为 A。如果 $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 不存在，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是发散的。

2. 如果存在 $c\geqslant a$，使得当 $x\geqslant c$ 时

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$$

则 (1) 当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散。

3. 设当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)\geqslant 0$，$g(x)>0$，

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\mu$，则

(1) 当 $0<\mu<+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当 $\mu=0$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 也发散；

(3) 当 $\mu=+\infty$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散；若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 也收敛。

4. 若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 为绝对收敛的无穷积分。

如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛。

5. 无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $A>a$，使得当 $u''>u'>A$ 时

$$\left|\int_{u'}^{u''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

6. **阿贝尔（Abel）判别法** 如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上收敛，$g(x)$ 单调有界，则 $\int_u^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

7. **狄里克莱（Dirichlet）判别法** 如果 $F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 有界，$g(x)$ 单调且当 $x\to+\infty$ 时趋向于零，则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

本节我们只对无穷区间上的广义积分进行讨论，而对于有限区间上的无界函数的广义积分不再进行研究，这是由于对于无界函数的广义积分只要作一变量替换，则无界函数的广义积分便成为无穷区间上的广义积分。比如 $f(x)$ 在 $x=b$ 为奇点，考虑广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，我们作变换 $t=\dfrac{1}{b-x}$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{1/(b-a)}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,f\left(b-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

这样，要讨论 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性，只要考虑无穷区间上的积分 $\int_{1/(b-a)}^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}\,f\left(b-\dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ 的敛散性即可。

在定积分中我们知道，如果 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 可积，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}\,f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$$

对于广义积分，除 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛外，再加上 $f(x)$ 单调的条件也有类似的结论。下面的例 1 对此加以证明。但是，当

$f(x)$不是单调函数时，结论未必成立。

例 1　设 $f(x)$ 于 $[a,+\infty)$ 单调，且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0+}h\sum_{n=1}^{\infty}f(a+nh)。$$

证　不妨设 $f(x)$ 于 $[a,+\infty)$ 单调下降，则对任意的 $h>0$ 及任意的正整数 n，都有

$$hf(a+nh)\leqslant\int_{a+(n-1)h}^{a+nh}f(x)\mathrm{d}x\leqslant hf(a+(n-1)h)$$

所以

$$h\sum_{n=1}^{\infty}f(a+nh)\leqslant\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\leqslant h\sum_{n=1}^{\infty}f(a+(n-1)h)$$

由于

$$h\sum_{n=1}^{\infty}f(a+(n-1)h)=hf(a)+h\sum_{n=1}^{\infty}f(a+nh)$$

故

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x-hf(a)\leqslant h\sum_{n=1}^{\infty}f(a+nh)\leqslant\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

由于 $\lim\limits_{h\to 0+}hf(a)=0$，因此

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0+}h\sum_{n=1}^{\infty}f(a+nh)$$

如果 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则由无穷积分的定义知，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，当 $A>A_0$ 时，有

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

由此我们可以证明下面的例 2。

例 2　设 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，$\varphi(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos yx\mathrm{d}x$，试

证$\varphi(y)$在$(-\infty,+\infty)$一致连续。

证 因为$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$收敛，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$A_0>0$，当$A\geqslant A_0$时

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{8}\qquad \int_{A}^{+\infty}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{8}$$

令 $\delta=\dfrac{\varepsilon/2}{1+A_0\int_{-A_0}^{A_0}|f(x)|\,dx}$，则当$|y_1-y_2|<\delta$时

$$\begin{aligned}
&|\varphi(y_1)-\varphi(y_2)|\\
&=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos y_1x\,dx-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos y_2x\,dx\right|\\
&=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)[\cos y_1x-\cos y_2x]\,dx\right|\\
&\leqslant\int_{-\infty}^{-A_0}|f(x)[\cos y_1x-\cos y_2x]|\,dx\\
&\quad+\int_{-A_0}^{A_0}|f(x)[\cos y_1x-\cos y_2x]|\,dx\\
&\quad+\int_{A_0}^{+\infty}|f(x)[\cos y_1x-\cos y_2x]|\,dx\\
&\leqslant 2\int_{-\infty}^{A_0}|f(x)|\,dx+2\int_{-A_0}^{A_0}|f(x)|\left|\sin\frac{(y_1+y_2)x}{2}\right.\\
&\qquad\left.\sin\frac{(y_1-y_2)x}{2}\right|dx\\
&\qquad+2\int_{A_0}^{+\infty}|f(x)|\,dx\\
&<\frac{\varepsilon}{4}+\int_{-A_0}^{A_0}|f(x)|\,|y_1-y_2|\,|x|\,dx+\frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+A_0\,|y_1-y_2|\int_{-A_0}^{A_0}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\delta A_0\int_{-A_0}^{A_0}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

故 $\varphi(y)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致连续。

由于广义积分是由定积分取极限而定义的，因此广义积分与函数的极限有着密切的联系，尤其是利用广义积分的性质来证明函数的极限有时是非常方便的。

例3 设 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的一致连续函数，且 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，试证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

证 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq 0$，则存在 $\varepsilon_0>0$，对任意的 $A>0$，必存在与 A 有关的 $x_0>A$。使 $|f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$，不妨设 $f(x_0)\geqslant\varepsilon_0$。因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续，所以存在 $\delta>0$，当 x'，$x''\geqslant 0$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

故当 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

所以
$$f(x)>f(x_0)-\frac{\varepsilon_0}{2}\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$$

因此
$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\right|>\varepsilon_0\delta$$

这与 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛相矛盾，从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

在例3的命题中“$f(x)$ 于 $[0,+\infty)$ 一致连续”的条件是必要的，如果将上述条件改为“$f(x)$ 于 $[0,+\infty)$ 连续”，则结论未必成立。例如

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x=n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \\ 0 & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1}{2^n},n+1-\frac{1}{2^{n+1}}\right] \\ \text{线性} & \text{其它} \end{cases}$$

则
$$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

所以 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，显然 $f(x)$ 于 $[0,+\infty)$ 是连续的，但 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在。

例4 设 $f(x)$ 在 $x\geqslant a$ 时为单调函数，且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$。

证 不妨设 $f(x)$ 单调减少，因为 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$。事实上，由于 $f(x)$ 单调，故 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，假设 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\neq0$，不妨设 $A>0$，则对 $0<B<A$，存在 $M>a$，当 $x>M$ 时，$f(x)>B$，所以
$$\int_M^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=+\infty$$
这与 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛相矛盾，故 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$。

由于 $f(x)$ 单调减少，$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$，因此 $f(x)\geqslant0$。因为 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $G>a$，当 $x>G$ 时
$$\int_G^x f(t)\mathrm{d}t<\varepsilon \tag{4.4.1}$$
由于 $f(x)$ 单调减少，所以
$$\int_G^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant f(x)\int_G^x\mathrm{d}t=(x-G)f(x) \tag{4.4.2}$$

故由式(4.4.1)及(4.4.2)得

$$xf(x)\leqslant Gf(x)+\int_G^x f(t)\mathrm{d}t<Gf(x)+\varepsilon \qquad (4.4.3)$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，所以存在 $G^*>G$，当 $x>G^*$ 时

$$Gf(x)<\varepsilon \qquad (4.4.4)$$

从而由式 (4.4.3) 及 (4.4.4) 知，当 $x>G^*$时，$xf(x)<2\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$ 。

阿贝尔判别法及狄里克莱判别法在被积函数为两个函数乘积 $f(x)\cdot g(x)$ 的广义积分中，对于判别其收敛性起到十分重要的作用，现举一例说明其用法。

例5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，试证 $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 也收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x。$$

证 先考虑 $\int_{-\infty}^{-1} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$。

因为 $\frac{1}{2}(y-\sqrt{y^2+4})$ 具有连续的导数，所以对

$\int_{-\infty}^{-1} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 可作变换 $x=\frac{1}{2}(y-\sqrt{y^2+4})$，

得到 $\int_{-\infty}^{-1} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(y)\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\mathrm{d}y$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\int_{-\infty}^{0} f(y)\mathrm{d}y$ 也收敛。因为

$\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)'=\frac{-4}{(y^2+4)^{3/2}}<0$，所以 $1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}$

单调下降。又因为$\lim\limits_{y\to-\infty}\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)=2$，所以

$1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}$ 于（$-\infty$，0）有界。

因此由阿贝尔判别法知$\int_{-\infty}^{0}f(y)\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\mathrm{d}y$ 收敛.

同样对 $\int_{-1}^{0}f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 作变换$x=\frac{1}{2}(y-\sqrt{y^2+4})$，得

$$\int_{-1}^{0}f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}f(y)\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\mathrm{d}y$$

同上面类似，可以证明 $\int_{0}^{+\infty}f(y)\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\mathrm{d}y$ 收敛。

同样，对$\int_{0}^{1}f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 及 $\int_{1}^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 作变换

$x=\frac{1}{2}(y+\sqrt{y^2+4})$，可得

$$\int_{0}^{1}f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}f(y)\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\mathrm{d}y$$

及

$$\int_{1}^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}f(y)\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\mathrm{d}y$$

可以类似证明 $\int_{-\infty}^{0}f(y)\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\mathrm{d}y$ 及

$\int_{0}^{+\infty}f(y)\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\mathrm{d}y$ 都收敛，故$\int_{-\infty}^{-1}f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$、

$\int_{-1}^{0} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$、$\int_{0}^{1} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$ 及

$\int_{1}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$ 都收敛。

从而 $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(y)\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)dy$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} f(y)\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)dy$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(y)\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)dy$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} f(y)\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

练 习 题

1. 设 $f(x)$ 于 $(0,1]$ 单调，$x=0$ 为 $f(x)$ 的奇点，若 $\int_{0}^{1} f(x)dx$ 收敛，试证

$$\int_{0}^{1} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)。$$

2. 设 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，且当 $x\geqslant 1$ 时有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$，试证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<1+\dfrac{\pi}{4}$。

3. 设 $f(x)$ 于 $[a,+\infty)$ 连续可微，$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 及 $\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，试证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

4. 若 $f(x)$，$g(x)$ 在任何区间 $[a, A]$ 上都可积，又 $\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 及 $\int_a^{+\infty}g^2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，试证 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x$ 及 $\int_a^{+\infty}|f(x)\cdot g(x)|\mathrm{d}x$ 都收敛。

第五章 级 数

§5.1 正项级数

基础理论

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛于有限值 s，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

若部分和数列 $\{s_n\}$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，a 为常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} aa_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 也都收敛，并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} aa_n = a\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则对其项任意加括号后所成的级数仍

为收敛级数，且其和不变。

4. 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

5. **柯西收敛原理**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充要条件是：对任意给定的正数$\varepsilon > 0$，存在正整数N，当$n > N$时，对于任意的自然数p，都有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$$

6. 每一项都是非负的级数称为正项级数。

若存在常数$c > 0$，使得两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$满足$a_n \leqslant cb_n$ $(n=1,2,\cdots)$，或者存在正整数N，当$n > N$时以上不等式成立，则

（1） 当$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；

（2） 当$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散。

若有$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$则

（1）当$0 < L \leqslant +\infty$，且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也收敛；

（2） 当$0 \leqslant L < +\infty$，且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散。

7. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数，若从某项起不等式

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$（$q$ 为常数）成立，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

若从某项起 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ 成立，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

若 $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

由于级数之和是由部分和求极限来定义的，因此级数是数列极限的一种特殊形式。我们知道，在极限理论中，柯西收敛原理对于判别一个极限的敛散性起到很重要的作用。在级数理论中也是如此，为了判别一个级数的敛散性，经常利用柯西收敛原理来判别。其特点是，不需要对级数求和，就可以直接判断出该级数的敛散性。

例 1 设 $a_n > 0$（$n = 1, 2, \cdots$），$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，试证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ 收敛。

证 必要性

由于 $a_n > 0$ $(n=1, 2, \cdots)$，所以 $\frac{a_n}{s_n} \leqslant \frac{a_n}{a_1}$，而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{a_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

是收敛级数，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ 收敛。

充分性

设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ 收敛，假设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty$，故对任意给定的正整数 n，存在正整数 p，使 $s_{n+p}\geqslant 2s_n$

所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{s_k}\geqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{s_{n+p}}$$
$$=\frac{s_{n+p}-s_n}{s_{n+p}}$$
$$=1-\frac{s_n}{s_{n+p}}$$
$$\geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ 发散，此与题设条件矛盾，从而必有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

例 2 设 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$，试证

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 有界。

证 由 $\{a_n\}$ 的单增性易知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 为正项级数。

必要性

设 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛，假设 $\{a_n\}$ 无界，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$$

所以对任意给定的正整数n，必存在正整数p，使得

$$a_{n+p}\geqslant 2a_n$$

故

$$\sum_{k=n}^{n+p-1}\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}}$$

$$\geqslant\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{n+p}}$$

$$=\frac{a_{n+p}-a_n}{a_{n+p}}$$

$$=1-\frac{a_n}{a_{n+p}}\geqslant\frac{1}{2}$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$发散，此与题设条件矛盾，故$\{a_n\}$有界。

充分性

设$\{a_n\}$有界，则$\{a_n\}$收敛，设$\lim_{n\to\infty}a_n=a$。由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1}$$

$$=\frac{a-a_1}{a_1}$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛。

由级数的定义我们知道，级数之和就是该级数的部分和数列的极限，因此有关极限的许多理论都可以在求级数和时得到应用，比如利用“两头夹定理”，可以比较容易地求出某些级数之和。

例 3 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$a_n \geqslant 0$（$n=1,2,\cdots$），试证

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}=1 .$$

证 因为当 $n \geqslant 2$ 时

$$\frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}$$

$$=\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_{n-1}+1)}$$

$$-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}$$

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}$$

$$=\frac{a_1}{a_1+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_{n-1}+1)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}\right]$$

$$=\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{1}{a_1+1}$$

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}$$

由于

$$0<\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}$$

$$<\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=+\infty$，即

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=+\infty$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}=0$$

从而 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}=1$$

例 4 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $(a_n>0)$，试证

（1） 存在正整数n_0，使$a_{n_0}=\sup\{a_n\}$；

（2） 对于任意的 $p>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛；

（3） $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p}=\sup\{a_n\}$.

证 （1）因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且$a_n>0$ （$n=1, 2, \cdots$），所以存在正整数N，当$n>N$时

$$a_n<a_1$$

故

$$\sup\{a_n\}=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$$

设 $a_{n_0}=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ （$1\leqslant n_0\leqslant N$），则

$$a_{n_0}=\sup\{a_n\}$$

（2） 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以存在正整数N，当$n>N$时 $a_n<1$，故由 $p>1$ 得

$$a_n^p<a_n$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛。

（3） 设 $a_{n_0}=\sup\{a_n\}$。因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$收敛（$p>1$），所以存在正整数$N$，使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^p<a_{n_0}^p$$

故

$$a_{n_0}=(a_{n_0}^p)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p}$$

$$<\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p+a_{n_0}^p\right)^{1/p}$$

$$\leqslant(Na_{n_0}^p+a_{n_0}^p)^{1/p}=(N+1)^{1/p}a_{n_0}$$

而 $\lim_{p\to+\infty}(N+1)^{1/p}=1$，从而

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p}=a_{n_0}=\sup\{a_n\}$$

我们知道，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件是极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。如果将级数的条件适当加强，则可以得出更好的结论，下面的例 5 便是一例。

例 5 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的正项级数，且 $\{a_n\}$ 单调下降，则 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$。

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时

$$\sum_{k=N_1+1}^{n} a_k < \varepsilon$$

由于

$$(n-N_1)a_n \leqslant \sum_{k=N_1+1}^{n} a_k$$

所以

$$na_n \leqslant N_1 a_n + \sum_{k=N_1+1}^{n} a_k < N_1 a_n + \varepsilon$$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，故存在正整数 N_2，当 $n > N_2$ 时

$$a_n < \frac{\varepsilon}{N_1}$$

令 $N = \max(N_1, N_2)$，则当 $n > N$ 时

$$na_n < N_1 a_n + \varepsilon < N_1 \cdot \frac{\varepsilon}{N_1} + \varepsilon = 2\varepsilon$$

故 $$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$$

利用例 5 的结果，又可得到下面例 6 的结论。

例 6 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\{a_n\}$单调，则 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$。

证 不妨设 $\{a_n\}$ 单调下降。因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，因此对一切 n，有 $a_n \geqslant 0$。

由于

$$\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \cdots + n(a_n - a_{n+1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k - n a_{n+1}$$

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} n a_{n+1} \qquad (5.1.1)$$

因为 $n a_{n+1} = (n+1)a_{n+1} - a_{n+1}$，$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$，又由例5知，$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1} = 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty} n a_{n+1} = 0 \qquad (5.1.2)$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，从而由式(5.1.1)及(5.1.2)知

$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

在级数的命题证明中，我们经常采用比较判别法来判断正项级数的敛散性，但这需要选用适当的另一正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与之进行比较，如果事先还不能确定原级数的敛散性，则与之进行比较的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也就无从选择。因为此时不知选择 $b_n \geqslant a_n$，还是选择 $b_n \leqslant a_n$。但是，如果存在单增数列 $\{c_n\}$ 及单调下降的函数 $f(x)$，使得 $a_n = f(c_n)$，只要选取

$$b_n = \frac{1}{c_{n+1} - c_n} \int_{c_n}^{c_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

则

$$a_{n+1} \leqslant b_n \leqslant a_n$$

这样 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 便有相同的敛散性，因此要判断 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性，只要能判断 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的敛散性就可以了。由于 b_n 是由积分的形式给出，从而可以利用积分的性质来确定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的敛散性。基于这种想法，有时为了判别 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性，可构造一个用积分形式给出的数列 $\{b_n\}$，使 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，且满足 $a_n \leqslant b_n$，由此则可确定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性。

例 7 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛，$a_n \geqslant 0 \quad (n=1, 2, \cdots)$，试证 $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n}{k^2 + n^2}$ 也收敛。

证 因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_n}{k^2+n^2}=a_n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+n^2}$$

$$<a_n\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+n^2}$$

$$=a_n\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+n^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a_n}{n}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_n}{k^2+n^2}$ 收敛。

例 8 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^{\lambda}}(\lambda>1)$收敛。

证 因为正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$，由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{s_n}^{s_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\lambda}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{1}{s_n^{\lambda-1}}-\frac{1}{s_{n+1}^{\lambda-1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{1}{s_1^{\lambda-1}}-\frac{1}{s_n^{\lambda-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1^{\lambda-1}}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{s_n}^{s_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\lambda}}$收敛。

因为

$$\int_{s_n}^{s_{n+1}}\frac{dx}{x^{\lambda}}>\frac{a_{n+1}}{s_{n+1}^{\lambda}}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^{\lambda}}$ 收敛。

练 习 题

1. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$ 也都收敛。

2. 试证若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

3. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，如果对此级数任意加上许多括号，所得的新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是收敛的，试证原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也是收敛的。

4. **（对数判别法）**若有 $a>0$，使得当 $n>n_0$ 时，有

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+a$$

其中 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

若 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1$$

则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

5. 设 $0<x_1<1$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，试证

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = 1$$

提示：用归纳法证明 $x_n<\frac{1}{n+1}$，再证明数列$\{nx_n\}$单调上升，从而得知 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$ 存在。最后再证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$。

6. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$A_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$，试证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{A_{n-1}}$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{A_{n-1}^{\lambda}}$（$0<\lambda<1$）收敛。

§5.2 一般项级数

基础理论

1. 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛。

2. 如果一个级数的各项正负号交错出现，也就是形如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ $(a_n>0,\ n=1,2,\cdots)$的级数称为交错级数。

莱尼布兹(Leibniz)判别法

如果交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$的项满足以下条件：

（1） $a_{n+1}\leqslant a_n$ $(n=1,2,\cdots)$；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$收敛。

3. **阿贝尔变换**

设 a_k，b_k $(k=1,2,\cdots,n)$是两组数，令

$$A_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \quad (m=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

4. **阿贝尔判别法**

如果 $u_n = a_n b_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$、并且

（1） $\{b_n\}$ 是非负递减的数列；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的，

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

5. **狄里克莱判别法**

如果 $u_n = a_n b_n \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ 并且

（1）$\{b_n\}$ 是递减数列，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$；

（2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列有界，即

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant M \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

利用莱布尼兹判别法判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 的收敛性，

关键是证明$\{a_n\}$单调下降趋于零，而这方面的一些方法和技巧早在《数列的极限》一章中已经掌握，因此利用这种判别法一般是不会遇到太大困难的。

例1 设 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0$，$a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛。

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0$，所以当$n$充分大时

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-1>0$$

即
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$$

从而$\{a_n\}$单调下降。

选取适当的常数$a>0$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>a$，则存在正整数$N$，当$n\geqslant N$时

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>a$$

所以
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1}{1+\frac{a}{n}}$$

从而
$$\frac{a_{n+1}}{a_N}=\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$<\frac{1}{1+\frac{a}{N}}\cdot\frac{1}{1+\frac{a}{N+1}}\cdot\cdots$$

$$\cdot \frac{1}{1+\frac{a}{n}}$$

$$\leqslant \frac{1}{1+a\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$$

由于 $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=0$$

因此由莱布尼兹判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛。

例 2 设 $\{x_n\}$ 为单调上升数列，且 $x_n>0$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，$a>1$，试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{x_n x_{n-1}^a}$ 收敛。

证 因为 $\{x_n\}$ 单调上升，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{x_n x_{n-1}^a}$ 是正项级数，下面分两种情况进行证明。

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}x_n<+\infty$ 时。由于 $\{x_n\}$ 单调上升，所以

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{x_n x_{n-1}^a}\leqslant\frac{x_n-x_{n-1}}{x_0^{a+1}} \tag{5.2.1}$$

因为 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{x_0^{a+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-x_{k-1}}{x_0^{a+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_0}{x_0^{a+1}}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的存在且有限性知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{x_0^{a+1}}$ 存在且有限，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{x_0^{a+1}}$ 收敛，从而 由式(5.2.1)知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n x_{n-1}^a}$ 收敛。

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 时用下列两种方法进行证明。

证法一 因为 $\{x_n\}$ 单调上升，所以

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n x_{n-1}^a} = \frac{1}{x_{n-1}^a} - \frac{1}{x_n x_{n-1}^{a-1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{x_{n-1}^a} - \frac{1}{x_n^a} \qquad (5.2.2)$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_{n-1}^a} - \frac{1}{x_n^a}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{k-1}^a} - \frac{1}{x_k^a}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_0^a} - \frac{1}{x_n^a}\right)$$

$$= \frac{1}{x_0^a}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_{n-1}^a} - \frac{1}{x_n^a}\right)$ 收敛，从而 由式(5.2.2)知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n x_{n-1}^a}$ 也收敛。

证法二 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n x_{n-1}^a} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_{n-1}^a} - \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{1}{x_{n-1}^a}\right)$$

而级数

$$\frac{1}{x_0^a}-\frac{x_0}{x_1}\cdot\frac{1}{x_0^a}+\frac{1}{x_1^a}-\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_1^a}+\frac{1}{x_2^a}$$

$$-\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{1}{x_2^a}+\cdots$$

是交错级数，并且由于

$$\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{1}{x_{n-1}^a}\leqslant\frac{1}{x_{n-1}^a}$$

及
$$\frac{1}{x_n^a}\leqslant\frac{1}{x_n\cdot x_{n-1}^{a-1}}=\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{1}{x_{n-1}^a}$$

因此这个级数是单调下降的。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^a}=0\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{1}{x_{n-1}^a}=0$$

故由莱布尼兹判别法知，级数

$$\frac{1}{x_0^a}-\frac{x_0}{x_1}\cdot\frac{1}{x_0^a}+\frac{1}{x_1^a}-\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_1^a}$$

$$+\frac{1}{x_1^a}-\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{1}{x_2^a}+\cdots$$

收敛。从而对其添加括号后所成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_{n-1}^a}-\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{1}{x_{n-1}^a}\right)$$

也收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{x_nx_{n-1}^a}$ 收敛。

阿贝尔变换 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k=A_nb_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}A_k(b_{k+1}-b_k)$ 在形

式上与积分学中的分部积分公式是十分相象的。为了说明这一点，我们考察积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$，并设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，利用分部积分公式，有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=F(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\mathrm{d}g(x)$$

$$=F(b)g(b)-\int_a^b F(x)\mathrm{d}g(x)$$

再把它和阿贝尔变换式作比较，可以看出，阿贝尔变换式中的 A 相当于分部积分公式中的 $F(x)$，而差 $b_{k+1}-b_k$ 相当于微分 $\mathrm{d}g(x)$，和式相当于积分。

阿贝尔变换在一般项级数的命题证明中经常起到很重要的作用。因为阿贝尔变换是将 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$ 进行恒等变形，因此要讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 的敛散性，只要讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(A_n b_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k-b_{k+1})\right)$ 的敛散性就可以了。在一定条件下，讨论后一极限的敛散性是比较容易的。

例 3 设 $\{na_n\}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，试证 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 也收敛。

证 设 $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$，$s_n^*=\sum\limits_{k=1}^{n} k(a_k-a_{k-1})$。由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^*$ 存在且有限。由阿贝尔变换得

$$s_n^*=\sum_{k=1}^{n} k(a_k-a_{k-1})$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{[k-(k+1)]\sum_{i=1}^{k}(a_i-a_{i-1})\right\}$$

$$=n\,a_n-n\,a_0-\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_0)$$

$$=n\,a_n-\sum_{k=0}^{n-1}a_k$$

所以 $$s_{n-1}=n\,a_n-s_n^* \qquad (5.2.3)$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} n\,a_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^*$ 都存在且有限，故由式(5.2.3)

知 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1}$ 存在且有限，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛。

例 4 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=0$。

证 令 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}$，$s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$

且 $$\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}=s$$

由阿贝尔变换知

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{a_k}{k}=n\,s_n+\sum_{k=1}^{n-1}(-s_k)$$

$$=n\,s_n-(s_1+s_2+\cdots+s_{n-1})$$

所以

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = s_n - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}}{n-1}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$=\lim_{n\to\infty}s_n - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}}{n-1}\right)$$

$$= s - s = 0$$

例 5 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ （$a_n>0$）发散，$\{a_n\}$ 单减，$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n$ 收敛，其中 ε_n 为 $+1$ 或-1，试证不可能存在一个正整数N，使得当$n\geqslant N$时

$$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{n}>\alpha>0 \quad \text{（其中}\alpha\text{为常数）。}$$

证 令 $B_n=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n$，假设存在正数整 N_1，使得当 $n\geqslant N_1$ 时

$$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{n}>\alpha>0$$

显然由 ε_n 的定义知

$$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{n}\leqslant\frac{n}{n}=1$$

故

$$\alpha<1$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n$收敛，所以

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}|\varepsilon_n a_n|=0$$

故存在正整数N_2，当$n\geqslant N_2$时

$$a_n<1$$

且存在正整数 N_3，当 $n \geqslant N_3$ 时，对一切正整数 p，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k a_k\right| < 1$$

令 $N = \max(N_1, N_2, N_3)$，则当 $n \geqslant N$ 时

$$B_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n > \alpha n$$

$$a_n < 1 \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k a_k\right| < 1$$

同时成立。

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$a_n > 0$，所以对任意给定的正整数 n，存在正整数 $m > n$，使

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k > \frac{2-\alpha}{\alpha} n$$

故当 $n \geqslant N$ 时

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} \varepsilon_k a_k &= \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k a_k - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - a_n B_n \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m - a_n B_n \\
&> \alpha \left[\sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) k + m a_m\right] - a_n B_n \\
&= \alpha n a_n + \alpha \sum_{k=n+1}^{m} a_k - a_n B_n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&> \alpha n a_n + \alpha \frac{2-\alpha}{\alpha} n - n a_n \\
&= (2-\alpha)n - (1-\alpha) n a_n \\
&> (2-\alpha)n - (1-\alpha) n \\
&= n \geqslant 1
\end{aligned}
$$

这与 $\left|\sum_{k=n+1}^{m} \varepsilon_k a_k\right| < 1$ 矛盾，故命题结论成立。

同判别数列的敛散性一样，利用柯西收敛原理判别级数的敛散性有时是非常有效的。

例 6 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，试证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收敛。

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，所以对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，对任意的正整数 p，有

$$
\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k - a_{k-1}| < \varepsilon \quad 及 \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon
$$

并且由 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}|$ 的收敛性可得知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 收敛。因为

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1}) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty}(a_n - a_0)
\end{aligned}
$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在且有限，故 $\{a_n\}$ 有界，设 $|a_n|\leqslant M$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = |a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|$$

$$= |a_{n+1}b_{n+1}+[(a_{n+2}-a_{n+1})+a_{n+1}]b_{n+2}+\cdots$$
$$+[(a_{n+p}-a_{n+p-1})+(a_{n+p-1}-a_{n+p-2})+\cdots$$
$$+(a_{n+2}-a_{n+1})+a_{n+1}]b_{n+p}|$$

$$=\left|a_{n+1}\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k+(a_{n+2}-a_{n+1})\sum_{k=n+2}^{n+p} b_k\right.$$
$$\left.+\cdots+(a_{n+p}-a_{n+p-1})b_{n+p}\right|$$

$$\leqslant |a_{n+1}|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right|+|a_{n+2}-a_{n+1}|\left|\sum_{k=n+2}^{n+p} b_k\right|$$
$$+\cdots+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|\ |b_{n+p}|$$

$$<M\varepsilon+|a_{n+2}-a_{n+1}|\varepsilon+\cdots+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|\varepsilon$$

$$=\varepsilon\left(M+\sum_{k=n+2}^{n+p}|a_k-a_{k-1}|\right)$$

$$<\varepsilon(M+\varepsilon)$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

练　习　题

1．试证若级数的项加括号后所作成的级数收敛，并且在同一个括号内各项的符号相同，则去掉括号后，此级数也收敛。

2. 试证 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha}}$ 收敛，其中α为常数，设$\beta>\alpha$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\beta}}$ 也收敛。

3. 设 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ $(n=1, 2, \cdots)$，若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，试证$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛。

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，数列 $\{b_n\}$ 有界，试证 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛。

5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，试证 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

6. 若将级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的项的符号改变，使得 p 个正项之后跟随着 q 个负项，但不变更原来的顺序。则当 $p\neq q$ 时，此级数发散，当 $p=q$ 时，此级数收敛。

§ 5.3 函数项级数

基础理论

1. 设$f(x)$和$f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$都是在点集D上有定义的函数。如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，对一切$x\in D$，都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

则称$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于$f(x)$。

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 都在D上有定义，如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的前n项的和所构成的函数

列$\{s_n(x)\}$在D上一致收敛于$s(x)$，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在D上一致收敛于$s(x)$。

2. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$上一致收敛的充要条件是：对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，当$m>n>N$时，对一切$x\in I$，都有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|<\varepsilon$$

3. 如果在区间I上，有

$$|u_n(x)|\leqslant a_n(n=1, 2, \cdots)$$

而且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上一致收敛。

4. **狄尼(Dini)定理**

若在有限区间$[a, b]$上连续函数列$\{f_n(x)\}$收敛于连续函数$f(x)$，而对$[a, b]$上每一x，$\{f_n(x)\}$是单调数列，则$\{f_n(x)\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f(x)$。

5. **阿贝尔判别法**

设 (1) $u_n(x)=a_n(x)b_n(x)(x\in I, n=1, 2, \cdots)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在$I$上一致收敛；

(3) 存在常数$M>0$，使$|b_n(x)|\leqslant M(x\in I, n=1, 2, \cdots)$；

(4) 对I中每一x，$\{b_n(x)\}$都是单调数列。

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上一致收敛。

6. **狄里克莱判别法**

设　（1）　$u_n(x)=a_n(x)b_n(x)\quad (x\in I,\ n=1,\ 2,\ \cdots)$；

（2）　存在常数$M>0$，使$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right|\leqslant M\quad (x\in I,$
$n=1,\ 2,\ \cdots)$；

（3）　对每一$x\in I$，$\{b_n(x)\}$都是单调数列；

（4）　在I上$\{b_n(x)\}$一致收敛于零。

则　$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上一致收敛。

7. 每一项都在$[a,\ b]$上连续的函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，如果它在$[a,\ b]$上一致收敛于$s(x)$，则$s(x)$在$[a,\ b]$上连续。

8. 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,\ b]$上一致收敛于$s(x)$，$u_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$在$[a,\ b]$上连续，则

$$\int_a^b s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$$

9. 若在$[a,\ b]$上，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的每一项都具有连续导数$u'_n(x)$，且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$一致收敛，又$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$收敛于$s(x)$，则$s(x)$于$[a,\ b]$可导，且

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

我们知道，如果$s(x)$是有限个函数之和

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$$

而$u_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$在区间I上都连续（或可积，或

可导)，则$s(x)$在I上也连续(或可积，或可导)。但是，如果$s(x)$是无限个函数之和，即$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，则$s(x)$的连续性(或可积性，或可导性)就可能发生变化。可是，如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$(或$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$)在$I$上一致收敛，则$s(x)$在$I$上的连续性，可积性(或可导性)就可得以保证，因此一致收敛性在函数项级数中起到极其重要的作用。所以本节我们将对这一概念重点进行讨论。

判别函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$于区间$I$上一致收敛，最简单的方法是采用优势判别法(基础理论3)即如果对一切$x\in I$，都有$|u_n(x)|\leqslant a_n$ $(n=1, 2, \cdots)$，而常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$于$I$一致收敛。这样我们就将证明函数项级数的一致收敛性化为证明常数项级数的收敛性问题。同样，如果函数列$\{f_n(x)\}$满足：对一切$x\in I$，都有$|f_n(x)|\leqslant a_n$ $(n=1, 2, \cdots)$，则也可以将证明$\{f_n(x)\}$一致收敛问题化为证明数列$\{a_n\}$的收敛性问题，这种证明方法的基本技巧在于选择合适的a_n，使$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$(或数列$\{a_n\}$)收敛。

例1 设$f_1(x)$在有限闭区间$[a, b]$连续，定义函数列

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(x)\mathrm{d}x \quad (n=1, 2, \cdots)$$

试证$\{f_n(x)\}$在$[a, b]$上一致收敛到零。

证 因为$f_1(x)$于$[a, b]$连续，所以由连续函数的性质知，$f_1(x)$于$[a, b]$有界，即存在$M>0$，使

$$|f_1(x)|\leqslant M$$

故

$$|f_2(x)|\leqslant\int_a^x |f_1(t)|\mathrm{d}t\leqslant M(x-a)$$

$$|f_3(x)|\leqslant\int_a^x |f_2(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x M(t-a)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{M}{2}(x-a)^2$$

归纳可得

$$|f_{n+1}(x)|\leqslant\int_a^x |f_n(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{M}{n!}(x-a)^n$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(b-a)^n}{n!}=0$，所以对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，当$n>N$时

$$\frac{(b-a)^n}{n!}<\frac{\varepsilon}{M}$$

故

$$|f_{n+1}(x)|\leqslant\frac{M}{n!}(x-a)^n\leqslant M\frac{(b-a)^n}{n!}<\varepsilon$$

从而$\{f_n(x)\}$一致收敛到零。

例2 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数，$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，试讨论：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,\mathrm{e}^{-s_nx}$的收敛域；

（2）在收敛域内是否一致收敛；

（3）求一致收敛域。

解 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时：设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$。

（1） 由于对任意固定的 $x\in(-\infty,\ +\infty)$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n e^{-S_n x}}{a_n}=\lim_{n\to\infty} e^{-s_n x}=e^{-sx}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s_n x}$收敛，故收敛域为（$-\infty$，$+\infty$）。

（2） 由于对任意的正整数 n，取 $x_0=\dfrac{-\ln\dfrac{1}{a_n}}{s_n}$，则

$$|a_n e^{-s_n x_0}|=a_n\cdot\frac{1}{a_n}=1$$

故由柯西原理知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s_n x}$ 于（$-\infty$，$+\infty$）非一致收敛。

（3）任取 $M>0$，当 $x\in(-M,\ +\infty)$时，由于

$$|a_n e^{-S_n x}|\leqslant a_n e^{S_n M}\leqslant a_n e^{MS}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s_n x}$于$(-M,\ +\infty)$一致收敛。

当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时：

（1） 若$x<0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n e^{-s_n x}}{a_n}=\lim_{n\to\infty} e^{-s_n x}=+\infty$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s_n x}$ 发散。

若 $x=0$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s_n x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s_n x}$ 发散。

若 $x>0$，则

$$a_n e^{-s_n x} = \frac{a_n}{e^{s_n x}} \leqslant \frac{2a_n}{s_n^2 x^2} = \frac{2}{x^2} \cdot \frac{a_n}{s_n^2}$$

由于

$$\int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{dx}{x^2} \geqslant \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n^2} = \frac{a_n}{s_n^2}$$

又

$$\int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} \right) = \frac{1}{s_1}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s_n x}$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s_n x}$ 的收敛域为（0，$+\infty$）。

（2）由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，所以对任意给定的正整数 n，必存在正整数 $m>n$，使得

$$a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m \geqslant 1$$

取 $x_0 = \frac{1}{s_m}$，则

$$\begin{aligned} &|a_n e^{-s_n x_0} + a_{n+1} e^{-s_{n+1} x_0} + \cdots + a_m e^{-s_m x_0}| \\ &\geqslant |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| \, e^{-s_m x_0} \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{e}(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_m)$$

$$\geqslant\frac{1}{e}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ e^{-s_nx}$ 于（0，$+\infty$）非一致收敛。

（3） 由于对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 $x\in[\varepsilon,\ +\infty)$时

$$a_ne^{-s_nx}\leqslant a_ne^{-s_n\varepsilon}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-s_n\varepsilon}$收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-s_n(x)}$于$[\varepsilon,\ +\infty)$一致收敛。

上面已经提到，利用优势判别法证明一致收敛性的基本技巧在于选择适当的 a_n，使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（或数列$\{a_n\}$）收敛。但有些题目选择 a_n 是非常困难的，因而不易采用优势判别法来证明。另外，由于优势判别法是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$（或$\{f_n(x)\}$）一致收敛的充分条件，而非必要条件。就是说，如果 $|u_n(x)|\leqslant a_n\ (n=1,2,\cdots,x\in I)$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，并不能说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 于 I 不一致收敛。因此，证明一致收敛性采用优势判别法虽然方法简单，但并不是在所有的情况下都是可以采用的。下面介绍一种利用一致收敛的定义或柯西收敛原理（基础理论2）来证明一致收敛的方法。

我们知道，如果函数列$\{f_n(x)\}$于区间 I 上一致收敛，则必逐点收敛，因此对任意给定的 $\varepsilon>0$，及任取$x\in I$，当x固定时，必存在正整数 $N(x)$，使得当 $n>N(x)$ 时，$|f_n(x)-$

$f(x)| < \varepsilon$ 成立，其中 $f(x)$ 为 $f_n(x)$ 的极限函数。当 x 在 I 中变化时，我们就可以得到无穷多个正整数 $N(x)$。如果我们能从这无穷多个 $N(x)$ 中取得一个最大值 N，则 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛性就可以得到证明。但是，在一般情况下，无穷多个 $N(x)$ 中是不能保证存在最大值的。可是我们能从 I 中取出有限个点 x_1，x_2，…，x_k，对应于这有限个点确定出有限个正整数 N_1，N_2，…，N_k。显然 N_1，N_2，…，N_k 中是存在最大值的。假如从题设条件中能推导出如下结果：任取 $x \in I$，$\varepsilon > 0$，必存在 x_1，x_2，…，x_k 中某一点 x_i，使 $|f_n(x) - f_n(x_i)| < \varepsilon$ 成立，则利用三角不等式就可证得 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛性。这就是利用定义或柯西收敛原理直接证明 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛的基本思想。同样，证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一致收敛性也是如此。

例3 设 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 为有限闭区间 $[a, b]$ 上的单调函数，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，且 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数。试证函数列 $\{f_n(x)\}$ 于 $[a, b]$ 一致收敛。

证 因为 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 连续，所以一致连续，故对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 x'，$x'' \in [a, b]$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

取充分大的正整数 n_0，使 $(b-a)/n_0 < \delta$，令

$$x_k = a + \frac{k}{n_0}(b-a) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n_0)$$

则当 x'，$x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, n_0)$ 时

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

由于 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n_0)$，所以对

上述 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_k，当 $n>N_k$ 时

$$|f_n(x_k)-f(x_k)|<\varepsilon$$

令 $$N=\max\{N_0, N_1, \cdots, N_{n_0}\}$$

则当 $n>N$ 时，对所有 $k=0, 1, 2, \cdots, n_0$，都有

$$|f_n(x_k)-f(x_k)|<\varepsilon$$

任取 $x\in[a, b]$，则必有某个 k，使 $x\in[x_{k-1}, x_k]$，因为

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_k)|+|f_n(x_k)-f(x_k)| + |f(x_k)-f(x)|$$

而由 $f_n(x)$ 的单调性知

$$|f_n(x)-f_n(x_k)|\leqslant|f_n(x_{k-1})-f_n(x_k)|$$

又

$$|f_n(x_{k-1})-f_n(x_k)|\leqslant|f_n(x_{k-1})-f(x_{k-1})|+ |f(x_{k-1})-f(x_k)|+|f(x_k)-f_n(x_k)|$$

所以当 $n>N$ 时 $\quad |f_n(x)-f(x)|<5\varepsilon$

故 $\{f_n(x)\}$ 于 $[a, b]$ 一致收敛。

例 4 设 $f(x)$ 于 (a, b) 内有连续的导函数 $f'(x)$，且 $f_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$，试证在 $[\alpha, \beta]$ 上（其中 $a<\alpha<\beta<b$）$\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f'(x)$。

证 设 $a<\alpha'<\alpha<\beta<\beta'<b$，由于 $f'(x)$ 于 $[\alpha', \beta']$ 连续，所以一致连续，故对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x', x''\in[\alpha', \beta']$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时

$$|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon \tag{5.3.1}$$

取充分大的正整数 N，使得 $1/N\leqslant\min(\alpha-\alpha', \beta'-\beta, \delta)$，则当 $n>N$ 时，对一切 $x\in[\alpha, \beta]$ 都有 $x+1/n\in[\alpha', \beta']$，且 $|(x+\frac{1}{n})-x|=\frac{1}{n}<\delta$，故

$$|f_n(x)-f'(x)|=\left|n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]-f'(x)\right|$$
$$=\left|f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)-f'(x)\right| \quad (0<\theta<1)$$

由于 $\left|\left(x+\frac{\theta}{n}\right)-x\right|=\frac{\theta}{n}<\delta$，所以由式(5.3.1)得

$$|f_n(x)-f'(x)|<\varepsilon$$

从而 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f'(x)$。

例 5 设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上处处收敛，且存在 $M>0$，使对一切正整数 n 及一切 $x\in[a, b]$，都有 $|f_n'(x)|\leqslant M$，试证 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$，取充分大的正整数 n_0，使得 $(b-a)/n_0<\varepsilon$，令

$$x_k=a+\frac{k(b-a)}{n_0} \qquad (k=1,2,\cdots,n_0)$$

由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $x=x_k$ $(k=1, 2, \cdots, n_0)$ 收敛，所以存在正整数 N_k，当 $n>N_k$ 时，对一切正整数 p 有

$$|f_{n+p}(x_k)-f_n(x_k)|<\varepsilon$$

令 $N=\max(N_1, N_2, \cdots, N_{n_0})$，任取 $x\in[a, b]$，则必存在某个 k $(1\leqslant k\leqslant n_0)$，使 $|x-x_k|<\varepsilon$，所以当 $n>N$ 时

$$\begin{aligned}
&|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\\
&\leqslant |f_{n+p}(x)-f_{n+p}(x_k)|+|f_{n+p}(x_k)-f_n(x_k)|\\
&\qquad +|f_n(x_k)-f_n(x)|\\
&=|f'_{n+p}(\xi_1)|\,|x-x_k|+|f_{n+p}(x_k)-f_n(x_k)|\\
&\qquad +|f'_n(\xi_2)|\,|x-x_k|\\
&<M\varepsilon+\varepsilon+M\varepsilon=(2M+1)\varepsilon
\end{aligned}$$

其中 ξ_1，ξ_2 位于 x，x_k 之间。故 $\{f_n(x)\}$ 于 $[a, b]$ 一致收敛。

证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 或函数列 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛性除上面介绍的几种方法外，我们还可以根据题设条件及 $\sum u_n(x)$ 或 $\{f_n(x)\}$ 的有关性质，利用其它有关定理和方法来证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 或 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛性。

例 6 设 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数，且对每个固定的 x，$\{u_n(x)\}$ 均单调下降趋于零，试证

（1） $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(x)$ 于 $(-\infty, +\infty)$ 存在；

（2） $s(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续。

证法一 （1）因为对任意的正整数 n，都有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right|\leqslant 1$$

又对每一个固定的 $x\in(-\infty, +\infty)$，$\{u_n(x)\}$ 单减趋于零，所以由狄里克莱判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(x)$ 收敛，故

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(x)$$

于 $(-\infty, +\infty)$ 存在。

（2）任取 $x_0\in(-\infty, +\infty)$，因为 $\{u_n(x_0)\}$ 单减趋于零，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使

$$u_N(x_0)<\varepsilon$$

由于 $u_N(x_0)$ 在 x_0 连续，所以存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|u_N(x)-u_N(x_0)|<\varepsilon$$

故 $$u_N(x)<u_N(x_0)+\varepsilon<2\varepsilon$$

从而当 $n\geqslant N$ 时，对一切 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，都有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k(x)\right|\leqslant u_{n+1}(x)\leqslant u_N(x)<2\varepsilon$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(x_0)$ 于 $(x_0-\delta,\ x+\delta)$ 一致收敛。由于 $u_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 于 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 连续，所以 $s(x)$ 于 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 连续，故 $s(x)$ 于 x_0 连续，由 x_0 的任意性知，$s(x)$ 于 $(-\infty,\ +\infty)$ 连续。

证法二 （1）因为在任意有限闭区间〔$a,\ b$〕上，连续函数列 $\{u_n(x)\}$ 收敛于连续函数 $f(x)=0$，而对〔$a,\ b$〕上每一 x，$\{u_n(x)\}$ 是单调数列，所以由狄尼定理知，$\{u_n(x)\}$ 在〔$a,\ b$〕上一致收敛于零。

又因为对任意的正整数 n，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right|\leqslant 1$$

故由狄里克莱判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(x)$ 于〔a,b〕一致收敛，从而 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(x)$ 于〔$a,\ b$〕存在，由 $a,\ b$ 的任意性得，$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(x)$ 于 $(-\infty,\ +\infty)$ 存在。

（2） 由（1）知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(x)$ 于任意有限闭区间〔$a,\ b$〕上一致收敛，又由 $u_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 的连续性知，$s(x)$ 在〔$a,\ b$〕连续。故由 $a,\ b$ 的任意性得，$s(x)$ 于 $(-\infty,\ +\infty)$ 连续。

例 7 试证 $\lim\limits_{x\to0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{n-1}}{n^x}=1$。

证 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{n-1}}{n^x}$，显然当 $x>0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{n-1}}{n^x}$ 收敛，故 $f(x)$ 于 $(0,+\infty)$ 有意义，且

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^x}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right]$$

由于

$$\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}=\frac{1}{n^x}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}\right]$$

而对任意固定的 $x\geqslant0$，数列 $\{\frac{1}{n^x}\}$ 及 $\{1-\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^x}\}$ 都是非负单减的，所以 $\{\frac{1}{n^x}-\dfrac{1}{(n+1)^x}\}$ 也是非负单减的，又当 $x\in[0,1]$ 时

$$\left|\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right|=\frac{1}{n^x}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}\right]$$
$$\leqslant1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}\leqslant1-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\frac{1}{n}$$

当 $x>1$ 时

$$\left|\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right|=\frac{1}{n^x}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{n^x} < \frac{1}{n}$$

所以当 $x \geqslant 0$ 时，总有

$$\left| \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right| < \frac{1}{n}$$

由于 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$，所以数列 $\left\{ \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right\}$ 于 $x \geqslant 0$ 一致收敛于零。又对任意的正整数 n，有

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \right| \leqslant 1$$

因此由狄里克莱判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right]$ 于 $x \geqslant 0$ 一致收敛。

由于当 $x \geqslant 0$ 时，$(-1)^{n-1} \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right]$ $(n=1, 2, \cdots)$ 连续，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right]$ 也于 $x \geqslant 0$ 连续，所以

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} f(x) &= 1 + \lim_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right] \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lim_{x \to 0^+} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right) \right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

其实函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 可以逐项求导的条件可比基础

理论9所需要的条件再减弱一些。对此下面例8给出其叙述并证明。

例 8 设 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$于〔a,b〕上连续可导，且存在一点 $x_0\in$〔a,b〕，使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在〔a, b〕一致收敛，则

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在〔$a$, b〕上一致收敛；

（2） $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在〔$a$, b〕上可导，且

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)。$$

证 （1）因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$于〔$a$, b〕一致收敛，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，对任意的正整数 p 及任意的 $x\in$〔a,b〕，有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k'(x)\right|<\varepsilon$

对任意取定的正整数 p，令 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)=\varphi(x)$，则

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{u_k(x)-u_k(x_0)}{x-x_0}\right|$$

$$=\left|\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)-\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_0)}{x-x_0}\right|$$

$$=\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}\right|$$

$$=|\varphi'(\xi)| \quad (\text{其中}\ \xi\ \text{位于}\ x,\ x_0\ \text{之间})$$

$$=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k'(\xi)\right| < \varepsilon$$

因此

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\left[u_k(x)-u_k(x_0)\right]\right|$$

$$=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{u_k(x)-u_k(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right|$$

$$=|x-x_0|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{u_k(x)-u_k(x_0)}{x-x_0}\right|$$

$$<(b-a)\varepsilon$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[u_n(x)-u_n(x_0)\right]$ 于 $[a,b]$ 一致收敛。

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n(x)-u_n(x_0)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 于 $[a,b]$ 一致收敛。

（2） 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 于 $[a,b]$ 一致收敛，故收敛，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 于 $[a,b]$ 一致收敛，因此由基础理论 9 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=s(x)$ 于 $[a,b]$ 可导，且

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$$

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 或 $\{f_n(x)\}$ 于区间 I 一致收敛，则除基础理

论中所述之外，还可以推出很多有意思的结论来，这些结论的证明大都离不开一致收敛这一重要条件。现举几例如下：

例 9 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛，则在适当加括号后，可使新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 (a,b) 绝对一致收敛(其中 $f_n(x)$ 是原级数某些项之和)。

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 于 (a,b) 一致收敛，所以存在正整数 n_1，使得对一切正整数 p，都有

$$\left|\sum_{n=n_1+1}^{n_1+p} u_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

同样存在正整数 $n_2>n_1$，使得对一切正整数 p，都有

$$\left|\sum_{n=n_2+1}^{n_2+p} u_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^2}$$

我们将这个过程一直进行下去。一般地，对任意的正整数 k，存在正整数 $n_k>n_{k-1}$，使得对一切正整数 p，都有

$$\left|\sum_{n=n_k+1}^{n_k+p} u_n(x)\right| < \frac{1}{2^k}$$

令 $f_1(x)=\sum_{n=1}^{n_1} u_n(x)$，$f_k(x)=\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} u_n(x)$ $(k=2,3,\cdots)$。则

$$|f_k(x)| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \qquad (k=2,3,\cdots)$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 绝对一致收敛。

例10 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，$f_n(x)$（$n=1, 2, \cdots$）在 $[a,b]$ 连续，则 $h(x)=\sup\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots\}$ 在 $[a,b]$ 也连续。

证 令 $h_n(x)=\max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\}$（$n=1, 2, \cdots$）。则对于任意给定的 $x\in[a,b]$，$\{h_n(x)\}$ 是单增数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n x=g(x)$．可以证明 $g(x)=h(x)$。

事实上，对于任意的正整数 n，显然有

$$f_n(x)\leqslant h_n(x)\leqslant g(x)$$

故 $$g(x)\geqslant\sup\{f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots\}=h(x)$$

另一方面，对于任意的正整数 n，显然有

$$h_n(x)\leqslant\sup\{f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots\}=h(x)$$

令 $n\to\infty$ 得

$$g(x)\leqslant h(x)$$

从而 $g(x)=h(x)$

下面证明 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 连续。

由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，对任意的正整数 p，及一切 $x\in[a,b]$ 都有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

对任一固定的 $x\in[a,b]$，若

$$\max\{f_{n+1}(x),f_{n+2}(x),\cdots,f_{n+p}(x)\}\geqslant h_n(x)$$

则必存在着正整数 $p_0(1\leqslant p_0\leqslant p)$，使

$$f_{n+p_0}(x)=h_{n+p}(x)$$

所以 $$|h_{n+p}(x)-h_n(x)|=h_{n+p}(x)-h_n(x)$$
$$=f_{n+p_0}(x)-h_n(x)$$
$$\leqslant f_{n+p_0}(x)-f_n(x)<\varepsilon$$

若 $\max\{f_{n+1}(x),f_{n+2}(x),\cdots,f_{n+p}(x)\}\leqslant h_n(x)$，则
$$h_{n+p}(x)=h_n(x)$$
所以
$$|h_{n+p}(x)-h_n(x)|=0<\varepsilon$$
因此无论是哪一种情况，只要 $n>N$，则对一切 $x\in[a,b]$ 都有
$$|h_{n+p}(x)-h_n(x)|<\varepsilon$$
故 $\{h_n(x)\}$ 一致收敛。

由于 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 于 $[a,b]$ 连续，因此由 § 2.2 例 3 知 $h_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 也于 $[a,b]$ 连续，再由 $\{h_n(x)\}$ 一致收敛于 $h(x)$ 知，$h(x)$ 于 $[a,b]$ 连续。

例11 设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 $[-1,1]$ 上的非负连续函数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}f_n(x)dx=1$。如果对任何 $0<c<1$，$\{f_n(x)\}$ 在 $[-1,-c]$ 及 $[c,1]$ 上一致收敛于零，试证对在 $[-1,1]$ 上连续的函数 $g(x)$，有
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}g(x)f_n(x)dx=g(0)。$$

证 由于 $g(x)$ 于 $x=0$ 连续，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x|<\delta$ 时
$$|g(x)-g(0)|<\varepsilon$$
因为 $\{f_n(x)\}$ 在 $[-1,-\delta]$ 及 $[\delta,1]$ 上一致收敛于零，且
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}f_n(x)dx=1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{-\delta} f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{1} f_n(x)\,dx=0$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\int_{-1}^{-\delta} f_n(x)\,dx+\int_{-\delta}^{\delta} f_n(x)\,dx+\int_{\delta}^{1} f_n(x)\,dx\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} f_n(x)\,dx=1$$

由于 $g(x)$ 于 $[-1,1]$ 连续，所以有界。又 $\{f_n(x)\}$ 于 $[-1,-\delta]$ 及 $[\delta,1]$ 上一致收敛于零，故 $\{g(x)f_n(x)\}$ 在 $[-1,-\delta]$ 及 $[\delta,1]$ 上也一致收敛于零。所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{-\delta} g(x)f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{1} g(x)f_n(x)\,dx=0$$

因为 $f_n(x)\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$，且当 $|x|<\delta$ 时

$$g(0)-\varepsilon<g(x)<g(0)+\varepsilon$$

所以

$$(g(0)-\varepsilon)\int_{-\delta}^{\delta} f_n(x)\,dx\leqslant\int_{-\delta}^{\delta} g(x)f_n(x)\,dx$$

$$\leqslant(g(0)+\varepsilon)\int_{-\delta}^{\delta} f_n(x)\,dx \tag{5.3.2}$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} f_n(x)dx=1$，所以存在正整数 N，当 $n>N$ 时

$$(g(0)-\varepsilon)\int_{-\delta}^{\delta} f_n(x)\,dx>g(0)-2\varepsilon \tag{5.3.3}$$

$$(g(0)+\varepsilon)\int_{-\delta}^{\delta} f_n(x)\,dx<g(0)+2\varepsilon \tag{5.3.4}$$

故由式(5.3.2)、(5.3.3)及(5.3.4)得

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} g(x)f_n(x)\mathrm{d}x-g(0)\right|<2\varepsilon$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} g(x)f_n(x)\mathrm{d}x$存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} g(x)f_n(x)\mathrm{d}x=g(0)$$

因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} g(x)f_n(x)\mathrm{d}x\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\int_{-1}^{-\delta} g(x)f_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\delta}^{\delta} g(x)f_n(x)\mathrm{d}x\right.\\
&\qquad\left.+\int_{\delta}^{1} g(x)f_n(x)\mathrm{d}x\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} g(x)f_n(x)\mathrm{d}x\\
&=g(0)
\end{aligned}$$

需要强调指出，函数项级数或函数列逐项求极限、逐项求积分或逐项求导数，有关判别函数项级数或函数列一致收敛的定理条件一般是充分而非必要的。有时一致收敛的条件不满足，也可能允许逐项进行求极限、求积分或求导。有时即便要求一致收敛性的条件，也只能用“局部”一致收敛性来解决，具体说，比如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$收敛，$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$于$I$连续，要证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=s(x)$在$I$连续，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上并非一致收敛．因此用基础理论7直接证明$s(x)$在整个区间$I$上连续就有困难，但是，如果对任意的$x_0\in I$，存在$\delta>0$，

使$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$x_0$的$\delta$邻域内一致收敛，这样由基础理论7就可以保证$s(x)$在$x_0$的$\delta$邻域内连续，从而$s(x)$在$x_0$点连续。因此由$x_0$的任意性就可以证得$s(x)$在$I$上的连续性。其实这种证明思想在例6的证法一中已经用过，下面再举一例说明其用法。

例12 试证$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$连续，而不一致收敛．但有连续的各阶导函数。

证 显然当$x>1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$收敛，故$s(x)$于$(0,+\infty)$有意义。

令$\varepsilon_0=\frac{1}{4}$，对任意的正整数$n$，取$x_0=1+\frac{1}{n}$，则

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^{x_0}}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^{1+1/n}}\geqslant\frac{n}{(2n)^{1+1/n}}$$

$$=\frac{1}{2^{1+1/n}\cdot n^{1/n}}\to\frac{1}{2}\ (n\to\infty)$$

所以当n充分大时 $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^{x_0}}>\varepsilon_0$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$于$(1,\infty)$不一致收敛。

下面证明$s(x)$于$(1,+\infty)$连续。

任取$x_0\in(1,+\infty)$，则存在$x_1>1$，使$1<x_1<x_0$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_1}}$收敛，且当$x\geqslant x_1$时

$$\frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^{x_1}}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 于 $[x_1, +\infty)$ 一致收敛。又 $\frac{1}{n^x}$ $(n=1,2,\cdots)$ 于 $[x_1, +\infty)$ 连续，所以当 $x>x_1$ 时，$s(x)$ 连续，从而 $s(x)$ 于 x_0 连续。由 x_0 的任意性知，$s(x)$ 于 $(1, +\infty)$ 连续。

下面再证明 $s(x)$ 有连续的各阶导数。

任取 $x_0 \in (1, +\infty)$，令 x_1 满足 $1<x_1<x_0$。由于对任意给定的正整数 k，都有 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k \ln^k n}{n^{x_1}} \right|$ 收敛，而

$$\left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k \ln^k n}{n^x} \qquad (k=1,2,\cdots)$$

且当 $x \in [x_1, +\infty)$ 时，有

$$\left| \frac{(-1)^k \ln^k n}{n^x} \right| \leqslant \left| \frac{(-1)^k \ln^k n}{n^{x_1}} \right|$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)}$ 于 $(x_1, +\infty)$ 一致收敛。

由于 $\frac{(-1)^k \ln^k n}{n^x}$ $(n=1,2\cdots)$ 于 $(x_1, +\infty)$ 连续，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)}$ 于 $(x_1, +\infty)$ 连续，从而于 x_0 连续。由 x_0 的任意性得 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)}$ 于 $(1, +\infty)$ 连续，且显然有

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)}$$

故 $s(x)$ 于 $(1, +\infty)$ 有连续的各阶导函数。

下面举一个$u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$连续，而不要求 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$连续的例子。

例13 设$u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上连续，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上逐点收敛于$s(x)$，则$s(x)$在$[a,b]$上连续的充要条件是对任意给定的$\varepsilon>0$，存在有限个开区间$(a_1,b_1)$，$(a_2,b_2)$，…，$(a_m,b_m)$及相同个数的正整数$n_1$，$n_2$，…，$n_m$，使

$$[a,b]\subseteq(a_1,b_1)\cup(a_2,b_2)\cup\cdots\cup(a_m,b_m)$$

且当$x\in(a_i,b_i)\cap[a,b]$ $(i=1,2,\cdots,m)$时

$$\left|s(x)-\sum_{k=1}^{n_i}u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

证　必要性

任取$x_0\in[a,b]$，由于

$$s(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$$

所以对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数n_{x_0}，使得

$$\left|s(x_0)-\sum_{k=1}^{n_{x_0}}u_k(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

由于$s(x)$及$\sum_{k=1}^{n_{x_0}}u_k(x)$在$x_0$连续，所以存在$\delta_{x_0}>0$，当$x\in(x_0-\delta_{x_0},\ x_0+\delta_{x_0})\cap[a,b]$时

$$\left|s(x)-s(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

及

$$\left|\sum_{k=1}^{n_{x_0}} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n_{x_0}} u_k(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

故

$$\left|s(x) - \sum_{k=1}^{nx_0} u_k(x)\right|$$

$$\leqslant \left|s(x) - s(x_0)\right| + \left|s(x_0) - \sum_{k=1}^{nx_0} u_k(x_0)\right|$$

$$+ \left|\sum_{k=1}^{n_{x_0}} u_k(x_0) - \sum_{k=1}^{n_{x_0}} u_k(x)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

由于$\{(x-\delta_x,\ x+\delta_x);\ x\in[a,b]\}$覆盖$[a,b]$，所以存在有限个开区间仍覆盖$[a,b]$，设这有限个开区间为

$$(x_1-\delta x_1,\ x_1+\delta x_1),\ (x_2-\delta x_2,\ x_2+\delta x_2),\ \cdots,$$
$$(x_m-\delta_{x_m},\ x_m+\delta x_m)$$

则当$x\in(x_i-\delta_{xi},\ x_i+\delta_{xi})\cap[a,\ b]$　$(i=1,2,\cdots,m)$时

$$\left|s(x) - \sum_{k=1}^{n_{x_i}} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

记$x_i-\delta x_i=a_i$，$x_i+\delta x_i=b_i$　　$(i=1,2,\cdots,m)$。则

$$[a,b]\sqsubseteq(a_1,b_1)\cup(a_2,b_2)\cup\cdots\cup(a_m,b_m)$$

且当$x\in(a_i,b_i)\cap[a,b](i=1,2,\cdots,m)$时

$$\left|s(x) - \sum_{k=1}^{n_i} u_k(x)\right| < \varepsilon \quad (\text{其中 } n_i = n_{xi})$$

充分性

任取 $x_0\in[a,b]$ 及任意给定的 $\varepsilon>0$，由题设条件知，必存在某个正整数 $i(1\leqslant i\leqslant m)$，使 $x_0\in(a_i,b_i)$，且当 $x\in(a_i,b_i)\cap[a,b]$ 时

$$\left|s(x)-\sum_{k=1}^{n_i}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{n_i}u_k(x)$ 在 x_0 连续，所以存在 $\delta>0$，当 $x\in[a,b]$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$\left|\sum_{k=1}^{n_i}u_k(x)-\sum_{k=1}^{n_i}u_k(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

所以

$$\begin{aligned}&|s(x)-s(x_0)|\\&\leqslant\left|s(x)-\sum_{k=1}^{n_i}u_k(x)\right|+\left|\sum_{k=1}^{n_i}u_k(x)-\sum_{k=1}^{n_i}u_k(x_0)\right|\\&\qquad+\left|\sum_{k=1}^{n_i}u_k(x_0)-s(x_0)\right|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

故 $s(x)$ 在 $[a,b]$ 连续。

在一般情况下，证明关于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 或 $\{f_n(x)\}$ 的命题时，经常采用将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 或 $\{f_n(x)\}$ 分成两部分：$\sum\limits_{n=1}^{N}u_n(x)$ 和

$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n(x)$ 或 $\{f_1(x),f_2(x),\cdots,f_N(x)\}$和$\{f_{N+1}(x),f_{N+2}(x),\cdots\}$，使第一部分只含有有限项，从而保持了 $u_n(x)$ 或 $f_n(x)$ 的基本性质，另一部分则是其余项，使 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n(x)$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)-f_N(x)$ 的绝对值充分小，从而达到证明命题的目的。

例14 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛到$s(x)$，而且所有 $u_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的非负连续函数，则 $s(x)$ 必在 $[a,b]$达到最小值。

证 由于$u_n(x)\geqslant0(n=1,2,\cdots)$，所以 $s(x)\geqslant0$，故 $s(x)$的下确界存在，设 $m=\inf\{s(x);\ x\in[a,b]\}$，则存在 $\{x_i\}\subseteq[a,b]$，使 $\lim\limits_{i\to\infty}s(x_i)=m$。由于 $\{x_i\}$ 有界，故存在收敛子列，不妨设收敛子列就是 $\{x_i\}$ 本身，并且设 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=x_0$，则 $x_0\in[a,b]$。

下面证明 $s(x_0)=m$。

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=s(x_0)$，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数N，使得

$$\sum_{n=1}^{N}u_n(x_0)>s(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{N}u_n(x)$于 x_0 连续，所以存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$\left|\sum_{n=1}^{N}u_n(x)-\sum_{n=1}^{N}u_n(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

故 $$\sum_{n=1}^{N} u_n(x) > \sum_{n=1}^{N} u_n(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

由于 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x_0$，所以存在正整数 i_0，使得当 $i > i_0$ 时

$$|x_i - x_0| < \delta$$

故 $$\sum_{n=1}^{N} u_n(x_i) > \sum_{n=1}^{N} u_n(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} > s(x_0) - \varepsilon$$

由于 $u_n(x) \geqslant 0 \quad (n=1, 2, \cdots)$，所以

$$s(x_i) \geqslant \sum_{n=1}^{N} u_n(x_i) > s(x_0) - \varepsilon$$

故 $$\lim_{i\to\infty} s(x_i) \geqslant s(x_0) - \varepsilon$$

即 $$m \geqslant s(x_0) - \varepsilon$$

从而 $$m \leqslant s(x_0) \leqslant m + \varepsilon$$

由 ε 的任意性得

$$s(x_0) = m$$

故 $s(x)$ 在 $x_0 \in [a, b]$ 达到最小值。

注意，在例 14 的题设条件下，$s(x)$ 在 $[a, b]$ 未必能达到最大值。例如

$$u_n(x) = x^n(1-x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ n = 1, 2, \cdots)$$

显然 $u_n(x) \geqslant 0 \ (n = 1, 2, \cdots)$，且

$$s(x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\sup\{s(x): 0 \leqslant x \leqslant 1\} = 1$$

但 $s(x)$ 于 $[0, 1]$ 达不到 1。

练 习 题

1． 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数，且 $f(1) = 0$，试证函数列

$\{f(x)x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ 上一致收敛 ($\varepsilon>0$)，且

$\lim_{x\to a} u_n(x)=C_n$，试证 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 收敛，且有

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n$$

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无限次可导，在任何有限区间内 $\{f^{(n)}(x)\}$ 一致收敛于 $\varphi(x)$，试证

$$\varphi(x)=ce^x \quad (c \text{ 为常数})$$

4. 设 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上所有有理数所成的集上一致收敛，试证 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

5. 试证 $\lim_{x\to 1-0}\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{1+t^{2n}}dt=\frac{\pi}{4}\ln 2$

6. 设 $f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}$ $(n=1,2,\cdots)$，试证 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于一个函数 $f(x)$，并且当 $x\neq 0$ 时，有

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

但当 $x=0$ 时上面等式不成立。

7. 设 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上单调，试证如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点为绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

8. 试证若 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 c 点左连续，但 $\{f_n(x)\}$ 在 $x=c$ 发散。则在任何开区间 $(c-\varepsilon,c)$ 内 ($\varepsilon>0$)，$\{f_n(x)\}$ 必不一致收敛。

9. 设 $u_0(x)=x^2$，$u_n(x)=x^2+\int_0^x \sin u_{n-1}(t)dt$ $(n=1,2,\cdots)$，试证 $\{u_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

10. 设$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上有定义，$f_n(x)$可导，且$|f(x)|\leqslant 1$，$|f'(x)|\leqslant 1$ $(n=1,2,\cdots)$，试证

(1) $\{f_n(x)\}$有在$[0,1]$上所有有理点处收敛的子列；

(2) 此子列在$[0,1]$上的无理点处也收敛。

11. 试证

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$于$(0,+\infty)$收敛，但非一致收敛；

(2) $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$于$(0,+\infty)$连续。

§5.4 幂级数

基础理论

1. 形如$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的函数项级数称为幂级数。

对于任何幂级数，都存在一个数R $(0\leqslant R\leqslant+\infty)$，使得当$|x-x_0|<R$时级数绝对收敛；当$|x-x_0|>R$时级数发散，称$R$为这个幂级数的收敛半径。

2. 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的收敛半径为$R$，则此级数在$(x_0-R,x_0+R)$内的任一个闭区间$[a,b]$上一致收敛；又若级数在$x_0+R$（或$x_0-R$）点收敛，则它必在$[a,x_0+R]$（或$[x_0-R,a]$）一致收敛（其中$x_0-R<a<x_0+R$）。

3. 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的收敛半径为$R$，则

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} & 当\ 0<\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty 时\\ \infty & 当\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0 时\\ 0 & 当\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty 时\end{cases}$$

4. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 R，则其和函数 $s(x)$ 在 $(x_0-R,\ x_0+R)$ 内连续。

5. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 R，其和函数为 $s(x)$，则在 $(x_0-R,\ x_0+R)$ 内幂级数可以逐项积分或逐项微分。

6. 设 $f(x)$ 在 x_0 点有各阶导数，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点可以展成泰勒级数。

如果 $f(x)$ 在 x_0 点有各阶导数，并且有 $\delta>0$，使对一切 x，只要 $|x-x_0|<\delta$，便有 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点可以展成泰勒级数，其中 $R_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 阶余项：

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k。$$

由于幂级数是函数项级数的一种特殊情况，因此函数项级数中一些证明思想和方法都可以用到幂级数方面来，并且幂级数还具有某些函数项级数所不具备的性质和证明方法。

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在某收敛区间的右(左)端点处收敛，则由 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,R]$（$[-R,0]$）上的一致收敛性可知，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=R$（$x=-R$）点左(右)连续，因此

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

$$\left(\lim_{x\to -R+0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_nR^n\right)$$

但反之结论未必成立，即如果 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，

$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=s$，则未必有 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=s$。

例如 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x}(-1<x<1)$，显然 $R=1$，且

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$$

但 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 发散。

如果将条件加强一些，则上述结论也可以成立，下面的例1就来说明这个问题。

例1 设 $a_n\geqslant 0\quad(n=0,1,2,\cdots)$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R>0$，$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=s$，试证 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=s$。

证 显然对任意正整数 n，都有

$$\sum_{k=0}^{n}a_kR^k=\lim_{x\to R-0}\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\leqslant\lim_{x\to R-0}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=s$$

所以
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\leqslant s$$

另一方面，当 $x\in(0,R)$ 时

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

所以
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \geqslant \lim_{x\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$$
从而
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = s$$

利用“若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛，则 $\lim_{x\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$”的结论，我们又可以得到下面例 2 的结果。

例 2 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，当 $|x| < r$ 时收敛，试证若 $\sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ 收敛，则
$$\int_0^r f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}.$$

证 因为当 $0 < t < r$ 时
$$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t a_n x^n \mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$$
由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ 收敛，所以
$$\lim_{t\to r-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$$
即
$$\lim_{t\to r-0} \int_0^t f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$$

而 $$\lim_{t\to r-0}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=\int_0^r f(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^r f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$$

利用例 2 的结论．易证 $\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，事实上，当 $|t|<1$ 时

$$\frac{\ln(1-t)}{t}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由例 2 得

$$\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

下面的例 3 是一个非常有用的结论。

例 3　若在 $(-R,R)(R>0)$ 内有 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\equiv\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，试证 $a_n=b_n(n=0,1,2,\cdots)$。

特别，若在 $(-R,R)$ $(R>0)$ 内有 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\equiv 0$，则 $a_n=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$。

证　由 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$，令 $x=0$ 得

$$a_0=b_0$$

对任意的正整数 n，对 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 两边分别取 n 次导数，再令 $x=0$ 得

$$a_n=b_n$$

所以 $a_n=b_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$。

如果将例 2 的条件适当减弱，则结论仍然成立，对此下面的例 4 进行说明并证明之。

例 4 试证如果存在数列 $\{x_k\}$，$x_k\neq 0$ $(k=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_k=0$，且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_k^n=0(k=1,2,\cdots)$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\equiv 0$。

证 设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，由于 $s(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以

$$a_0=s(0)=\lim_{k\to\infty} s(x_k)=0$$

故 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，令 $s_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$，则 $s_1(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以 $a_1=s_1(0)=\lim\limits_{k\to\infty} s_1(x_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{s(x_k)}{x_k}=0$，用同样方法可证，对任意的正整数 n，都有 $a_n=0$，故

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\equiv 0$$

利用例 4 的结论，又可证明如下的例 5 及例 6。

例 5 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x|<R(R>0)$ 内收敛，如果 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不恒为零，则

$$\inf\{|x|;\ s(x)=0,\ 0<|x|<R\}>0。$$

证 假设 $\inf\{|x|;\ s(x)=0,\ 0<|x|<R\}=0$，则必存在 x_n，$0<|x_n|<R$，使 $s(x_n)=0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$。

由例 4 可得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0$，这与题设条件矛盾，故

$$\inf\{|x|;\ s(x)=0,\ 0<|x|<R\}>0$$

例 6 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 不恒为零，$s(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$ 如果 $s(x)$ 存在正根，则

$$\inf\{x;\ s(x)=0,\ x>0\}>0。$$

证 显然 $s(x)$ 于 $(-\infty, +\infty)$ 内无穷次可导，设 $a=\max(|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_n|)$，对任意的正整数 m，显然对一切 $x\in(-\infty, +\infty)$ 都有

$$|s^{(m)}(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| k^m \leqslant n \cdot a \cdot n^m = an^{m+1}$$

所以
$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{s^{(m)}(0)}{m!}\right|^{1/m} \leqslant \lim_{m\to\infty}\left(\frac{an^{m+1}}{m!}\right)^{1/m}=0$$

且对任意固定的 $x\in(-\infty, +\infty)$，有

$$\lim_{m\to\infty} |R_m(x)| \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{an^{m+2}}{(m+1)!}|x|^{m+1}=0$$

故 $s(x)$ 可展成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$，其收敛半径为 $+\infty$，且

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad x\in(-\infty, +\infty)$$

假设 $\inf\{x;\ s(x)=0,\ x>0\}=0$，则存在 $x_k>0$，使 $s(x_k)=0\ (k=1,2,\cdots)$，且 $\lim_{k\to\infty} x_k=0$。

由例 4 可得 $s(x)\equiv 0$，从而 $s(x)$ 的各阶导数也恒为零，故 $s(0)=a_0=0$，且

$$s^{(2m-1)}(0)=(-1)^{m-1}(a_1+2^{2m-1}a_2+3^{2m-1}a_3+\cdots+n^{2m-1}a_n)=0\quad(m=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

因此

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=0$$
$$a_1+2^3a_2+3^3a_3+\cdots+n^3a_n=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1+2^{2n-1}a_2+3^{2n-1}a_3+\cdots+n^{2n-1}a_n=0$$

由高等代数的知识可知

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \cdots & n^{2n-1} \end{vmatrix}\neq 0$$

故$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，这与题设条件矛循，因此

$$\inf\{x;\ s(x)=0,\ x>0\}>0$$

练　习　题

1. 如果$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R>0$，且$s''(x)\equiv s(x)$，$s(0)=1$，$s'(0)=0$，试求出级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$。

2. 若$f(x)$在$x=0$点有各级导数，且

$$|f^{(n)}(x)|<M\ (|x|<R)\qquad(n=1,2,\cdots)$$

试证$f(x)$在$x=0$可展成泰勒级数。

3. 设$f(x)$在$x=x_0$附近有$n+1$阶连续导数，且$f^{(n+1)}(x)\neq 0$，其泰勒展开式为

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)\ (\theta<\theta<1)$$

试证 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$。

4. 设 $f(x)$ 于 $(-c\ c)$ $(c>0)$ 内无穷次可导，且导函数一致有界，即 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M(x\in(-c,c),n=1,2,\cdots)$，如果对 $(-c,c)$ 的任何子区间 (α,β)，都存在 $x_0\in(\alpha,\beta)$，使 $f(x_0)\neq 0$，则 $f(x)=0$ 的根在 $(-c,c)$ 内只能有有限个。